Notes pour le séminaire "Méthodes de l'économie quantitative appliquée à l'agriculture et l'environnement"

Eléments d'économie mathématique - Application à l'environnement et aux ressources naturelles et agricoles *

Master *Economie du développement durable, de l'environnement et de l'energie (EDDEE)*

Pierre-Alain Jayet
Unité Mixte de Recherches INRA - INAPG en Economie Publique
BP01
Centre INRA de Versailles-Grignon
78850 Thiverval-Grignon
tel : 01 30 81 53 49
email : jayet@grignon.inra.fr

Janvier 2009

Table des matières

1 Economie du bien-être, quelques notions utiles pour l'évaluation de projet et l'analyse coût-bénéfice **4**
1.1 Introduction : "rappels" 4
1.2 Rareté des biens et prix comme signaux 5
1.2.1 Economie considérée 5
1.2.2 Caractérisation d'un état efficace 6
1.2.3 Interprétation : "tms", préférences sociales, prix implicites 8
1.2.4 Le rôle du marché 9
1.2.5 Les prix comme "bons" signaux économiques 10
1.2.6 La fonction de bien-être sociale et l'approche utilitariste 10
1.2.7 Variations de surplus 12

2 Régulation des externalités **17**
2.1 Caractérisation d'un état efficace avec effet externe, et décentralisation . . . 17
2.1.1 Deux exemples en économie d'échange 17
2.1.2 Externalités différenciées en économie d'échange 18
2.1.3 Un autre exemple, avec un "secteur de production". 18
2.1.4 Exemple d'une agence de l'eau 21
2.2 Plus généralement, plusieurs pollueurs, plusieurs pollués, types variés de pollution 22

3 Externalité : choix de l'instrument en situation d'incertitude **25**
3.1 Changement de paradigme dans la représentation du comportement des agents 25
3.2 Modèle espérance-variance en programmation linéaire. Estimateur sans biais de l'écart type (MOTAD). 27
3.3 Taxe, incertitude et aversion au risque, impact 28
3.4 Taxe vs marché de droits 30
3.5 Incertitude sur le dommage ou sur le coût d'abattement de la pollution . . 30

4 Modèle d'équilibre général : une approche dans le cadre d'une économie d'échange **33**
4.1 Quelques caractéristiques d'un modèle économique 33
4.2 Un modèle fondamental 33
4.3 Un essai de modélisation en équilibre simultané sur plusieurs marchés . . . 36

5 Régulation des marchés agricoles **38**
5.1 Politique de prix garanti 38
5.2 Prix et taxes à la production 41

[*]Ce document est redevable des remarques formulées par les étudiants depuis le début du séminaire en 1995, ainsi que des critiques formulées par les stagiaires et thésards du LESPA devenue UMR d'économie publique INA-INRA en 2000.

5.3 Le gel de terre . . . 41
5.4 Droit de douane optimal . . . 43
5.5 La PAC comme un jeu entre Etats membres . . . 44
5.6 Découplage des aides . . . 46

6 Modèle technico-économique et programmation mathématique 47
6.1 Programmation mathématique . . . 47
6.1.1 Programmation linéaire . . . 47
6.1.2 Programmation mathématique positive . . . 48
6.2 AROPAj . . . 48
6.2.1 Objectif . . . 49
6.2.2 Nomenclature . . . 49
6.2.3 Bases de données . . . 49
6.2.4 Typologie . . . 49
6.2.5 Estimations . . . 51
6.2.6 Calibrage . . . 51
6.2.7 Simulations . . . 51
6.2.8 Extensions . . . 51
6.2.9 Exploitation du modèle . . . 52
6.3 Extension à l'environnement . . . 52
6.3.1 Emissions de gaz à effet de serre . . . 52
6.3.2 Tassement des sols agricoles . . . 55
6.4 Changement d'occupation des terres aricoles . . . 55

7 Défaillance du marché : les asymétries d'information 57
7.1 Exemple de mécanisme direct révélateur . . . 57
7.2 Problème de sélection adverse . . . 60
7.3 Un modèle générique . . . 61
7.4 Gel de terre . . . 61
7.4.1 Gel de terre, terres hétérogènes . . . 61
7.5 Pollution diffuse . . . 70
7.5.1 Contrat taxe - transfert . . . 70
7.5.2 Contrat quota - transfert . . . 74
7.5.3 Marché de quota . . . 74
7.6 Tragédie des communs . . . 74
7.7 Retour au coût d'opportunité des fonds publics . . . 74
7.8 Segmentation "horizontales" des agents . . . 75
7.9 Contrats dynamiques . . . 75

8 Défaillance du marché : concurrence imparfaite 76
8.1 Préliminaire . . . 76
8.2 Duopole de Cournot . . . 77
8.3 Différenciation verticale . . . 77
8.4 Différenciation horizontale . . . 78

8.5 Stratégies publiques et professionnelles en matière de qualité 79

9 Commerce international stratégique **83**

10 Coopération, jeux coopératifs et coeur **85**
10.1 Partage d'un "gâteau" : marchandage à la Rubinstein. 85
10.2 Approche axiomatique de Nash 87
10.3 Approches coalitionnelles 90
10.3.1 Généralités et définitions 90
10.3.2 Approche axiomatique de Shapley. 93
10.3.3 Approches stratégiques 94
10.4 Application : options communautaires de réforme d'une OCM 95

11 Approche dynamique de problèmes d'économie de l'environnement **97**
11.1 Gestion de ressources, renouvelables ou épuisables 97
11.2 Gestion d'une ressource commune en asymétrie d'information 99
11.3 Ajustement de l'économie au changement climatique 99

A Annexes **101**
A.1 Concavité, convexité 101
A.2 Quelques théorèmes utiles 102
A.3 Extremum 102
A.3.1 Extremum libre 102
A.3.2 Extremum contraint 103
A.3.3 Applications en économie 103
A.4 Théorèmes d'enveloppe 103
A.4.1 Aperçu 103
A.4.2 Applications en économie 106
A.5 Théorèmes de points fixes 106
A.6 Dualité en économie 107
A.7 Eléments de théorie des jeux 107
A.8 Eléments de contrôle optimal 109

Résumé

Welfare analysis and regulation in agriculture and environment.

Ce document contient quelques notes de cours. Il sert de point d'appui au séminaire proposé dans le cadre du DEA "Economie de l'Environnement et des ressources naturelles" (Paris X-Nanterre, ENGREF, INA-PG, EHESS, X, Ponts, ...), devenu Master *Economie du développement durable, de l'environnement et de l'energie (EDDEE)* en 2005/2006. Il est alimenté par les échanges réalisés avec les étudiants depuis l'origine du séminaire (1995-1996). C'est un produit en constante évolution, dans lequel peuvent subsister des erreurs de tous ordres.
Quelques ouvrages ont pu être utilisés et/ou sont conseillés, en particulier ceux de H. Varian (Microeconomic analysis), J.J. Laffont (Cours de théorie microéconomique), A. Mas-Colell et al. (Microeconomic theory), R. Myerson (Game theory), C. Henry (Microeconomics for public policy), J.J. Laffont et J. Tirole (A theory of incentives in procurement and regulation), et pour les aspects plus spécifiquement mathématiques A. Seierstad et K. Sydsaeter (Optimal control theory with economic applications) et P. Michel (Cours de mathématiques pour économistes).
En l'état actuel, il est encore très incomplet, et truffé d'erreurs !

1 Economie du bien-être, quelques notions utiles pour l'évaluation de projet et l'analyse coût-bénéfice

1.1 Introduction : "rappels"

La formalisation mathématique est à double tranchant. On peut abriter derrière elle le peu de résultats concrets parfois obtenus. Mais elle oblige à la cohérence et à la rigueur. Elle permet, aussi, d'aller rapidement au bout de qu'il est possible d'obtenir. D'excellents ouvrages couvrent sans doute la totalité de ce qui est présenté dans ce document. Dans un souci d'autonomie et avec l'idée de focaliser l'attention sur la présentation des problèmes économiques dans leurs rapports avec l'agriculture et l'environnement, on revient sur quelques notions utiles.

Définition 1.1 *Efficacité au sens de Pareto : un état de l'économie est efficace si on ne peut améliorer la situation d'un agent sans en pénaliser strictement au moins un autre.*

Exemple : une ressource en quantité totale R, et N agents. Un état dans lequel l'un possède tout et les autres rien est Pareto-efficace. Corollaire : on a déjà identifié N états efficaces. En général, il y en a une infinité d'ordre N-1 (exemple de la boite d'Edgeworth dans une économie d'échange). Sur la base de ce simple exemple, on sera convaincu qu'efficacité et équité sont des notions bien déconnectées l'une de l'autre. La théorie du bien-être est en général performante sur la première. Pour la seconde, la théorie de la décision publique a surtout produit des théorèmes d'impossibilité (Arrow : il n'existe pas de fonction de choix social répondant à quelques axiomes simples - naturels - qui permettent de choisir entre les toutes les options possibles en tenant compte de tous types de comportement - rationalité - des agents ; "il n'existe pas de fonction de choix social non dictatoriale qui ...").

Nous avons les théorèmes bien connus qui synthétisent les relations entre efficacité économique et équilibre de marché concurrentiel.

Théorème 1.1 *Sous de "bonnes conditions", un équilibre concurrentiel est un état (Pareto-)efficace d'une économie d'échange avec secteur productif, les consommateurs étant actionnaires des entreprises.*

Théorème 1.2 *Il existe un système de prix concurrentiels et de dotations qui permet de décentraliser n'importe quel état efficace.*

Attention : Les hypothèses sont fortes (et pèsent plus sur le 2ème théorème que sur le premier). Parmi celles-ci, il convient de s'assurer de la convexité des ensembles de productions, que les utilités sont quasi-concaves.

Remarque : Il y a d'autres systèmes de marché que les marchés concurrentiels pour décentraliser des états efficaces (par exemple un monopole discriminant, Lollivier, Ensae).

Boite d'Edgeworth : Prenons l'exemple d'une économie d'échange, avec 2 consommateurs, 2 biens, des dotations initiales prises dans un pavé $[0,1]\otimes[0,1]$. La figure 1 représente un exemple d'ensemble des états efficaces au sens de Pareto. Un exemple numérique est proposé avec comme fonction d'utilité $U^i = \alpha_i ln(1+x_1) + ln(1+x_2)$ (figure 2).

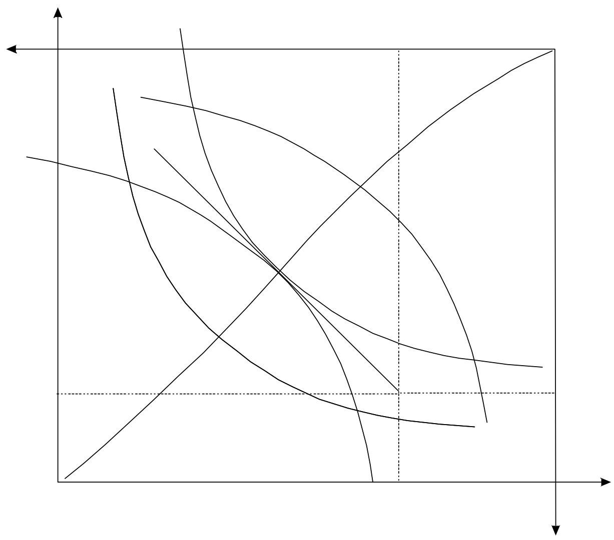


FIG. 1 – Boite d'Edgeworth

1.2 Rareté des biens et prix comme signaux

Pour l'évaluation de projets (environnementaux ou non), l'interprétation des prix de marché concurrentiel comme prix fictifs (ou comme coûts marginaux sociaux) associés aux biens "rares" est importante.

Sans qu'il s'agisse d'une démonstration parfaitement rigoureuse, on cherche à justifier ici cette "équivalence".

1.2.1 Economie considérée

L'économie est ici associée à l'identification des agents (les consommateurs), des biens (échangés et/ou produits), des entreprises (qui consomment et produisent des biens), et des dotations initiales des consommateurs (en biens d'origine et en part de profit des entreprises) :

- K biens "divisibles" sont consommés, produits et échangés ($k = 1, ..., K$)
- L'économie est organisée autour de la satisfaction de I consommateurs ($i = 1, ..., I$), caractérisés par une "fonction d'utilité" $U^i(X^i)$, qui représente la satisfaction du consommateur i disposant du panier de consommation $X^i \in \Re^K$, supposée respecter les "bonnes" propriétés (quasi-concavité). On note x_k^i la $k$ième composante du panier X^i. Le panier admissible de consommation suppose $x_k^i \geq 0$. Chaque fonction U^i est supposée monotone croissante et quasi-concave.
- La transformation des produits est réalisée par J firmes ($j = 1, ..., J$), avec autant d'ensembles de production $F^j(Y^j) \leq 0$ caractérisant les vecteurs de production nette

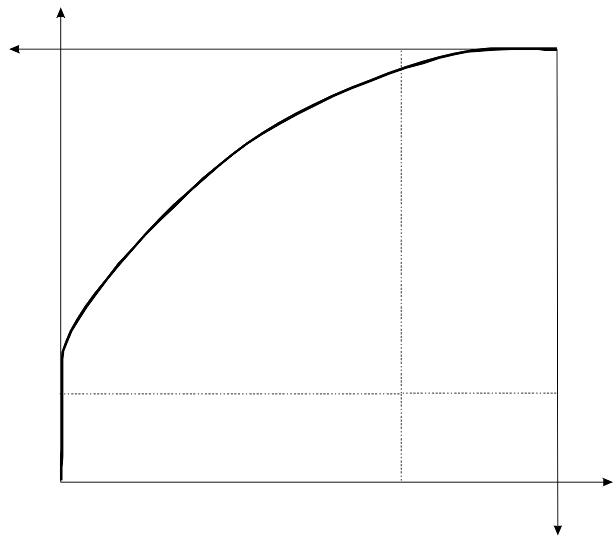


FIG. 2 – Boite d'Edgeworth ($U^i = \alpha_i ln(1+x_1) + ln(1+x_2)$; $\alpha_1 \leq \alpha 2$)

admissibles pour l'entreprise j. On note y_k^j la $k$ième composante du vecteur d'output net Y^j tels que $y_k^j \geq 0$. On associe à chaque composante y_k^j un coefficient ε_k^j à valeur ± 1 . Par convention, à un véritable output sera associé un coefficient $\varepsilon_k^j = 1$, à un input sera associé un coefficient $\varepsilon_k^j = -1$. Chaque ensemble de production est supposé convexe.

– Les consommateurs sont actionnaires des entreprises, qui décident de leurs choix productifs de façon autonome mais dont les profits sont intégralement partagés par les consommateurs. Ces derniers disposent de dotations initiales notées ω_k^i, les dotations totales en chacun des biens étant notées Ω_k.

1.2.2 Caractérisation d'un état efficace

Un état efficace de l'économie est obtenu quand un agent i ne peut obtenir "mieux" que ce qu'il a, tout autre agent $i' \neq i$ étant "satisfait" à un niveau supérieur ou gal à $u_0^{i'}$. Les multiplicateurs étant notés entre parenthèses en face des contraintes, le "programme" d'optimisation traduisant formellement cela est le suivant (par convention, et sans perte de généralité on retient la satisfaction de l'agent $i = 1$) :

$$\max_{X^1,\dots,X^I,Y^1,\dots,Y^J} U^1(X^1)$$
$$sc \begin{cases} \forall i \neq 1 & U^i(X^i) \geq u_0^i & (\lambda^i) \\ \forall j & F^j(Y^j) \leq 0 & (\psi^j) \\ \forall i,k & x_k^i \geq 0 & (\beta_k^i) \\ \forall j,k & y_k^j \geq 0 & (\gamma_k^i) \\ \forall k & \sum\limits_{i=1}^{I} x_k^i - \sum\limits_{j=1}^{J} \varepsilon_k^j y_k^j \leq \Omega_k & (\rho_k) \end{cases}$$

L'écriture du lagrangien généralisé associé à ce programme de maximisation restitue la symétrie entre les consommateurs (en faisant abstraction des niveaux d'utilité u_0^i) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{i=1}^{I} \lambda^i U^i(X^i) - \sum_{j=1}^{J} \psi^j F^j(Y^j) + \sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} \beta_k^i x_k^i + \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} \gamma_k^i y_k^j \\ &\quad - \sum_{k=1}^{K} \rho_k \left(\sum_{i=1}^{I} x_k^i - \sum_{j=1}^{J} \varepsilon_k^j y_k^j - \Omega_k \right) \end{aligned}$$

La maximisation de l'utilité d'un agent sous la condition que les autres disposent d'un niveau minimal d'utilité est formellement équivalente à la maximisation de la somme pondérée $\sum\limits_{i=1}^{I} \lambda^i U^i(X^i)$, sous les contraintes de positivité et de disponibilité des biens et sous les contraintes de réalisation des choix des entreprises ($\lambda^i > 0$).

La dissymétrie du programme initial entre les consommateurs disparaît avec cette formulation. A l'optimum du programme initial, les contraintes $U^i(X^i) \geq u_0^i$ sont saturées (puisque U^1 est monotone croissante). Les multiplicateurs associés sont donc à l'optimum à valeur strictement positive (voir ci-dessous).
En application du théorème de Kühn et Tucker, les conditions nécessaires d'optimalité conduisent au système (tous les multiplicateurs de Lagrange étant positifs ou nuls) :

$$\begin{array}{lll} \forall i,k & \lambda^i \frac{\partial U^i}{\partial x_k} + \beta_k^i - \rho_k = 0 & \text{(dérivation par rapport à } x_k^i) \\ \forall j,k & -\psi^j \frac{\partial F^j}{\partial y_k} + \gamma_k^i + \rho_k \varepsilon_k^j = 0 & \text{(dérivation par rapport à } y_k^j) \end{array}$$

auquel il faut ajouter les "relations d'exclusion" traduisant l'état de chacune des contraintes à l'optimum (la contrainte est saturée et le multiplicateur associé est en général à valeur strictement positive, sauf cas dégénéré, ou bien la contrainte est non saturée et le multiplicateur prend la valeur zéro).

Considérons un bien de consommation k consommé effectivement par un consommateur i (il existe nécessairement au moins un consommateur de chacun des biens de l'économie, avec l'hypothèse de monotonicité des utilités). Considérons ce même bien k consommé ou produit par une firme j. Les relations d'exclusion impliquent que $\beta_k^i = 0$ et $\gamma_k^j = 0$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \lambda^i \frac{\partial U^i}{\partial x_k} &= \rho_k \\ \psi^j \frac{\partial F^j}{\partial y_k} &= -\varepsilon_k^j \rho_k \end{aligned}$$

1.2.3 Interprétation : "tms", préférences sociales, prix implicites

En premier lieu, on retrouve le résultat classique caractérisant l'efficacité économique. Les taux marginaux de substitution sont égaux entre eux ("$dx_k^i/dx_{k'}^i$" ou "$\pm dy_k^j/dy_{k'}^j$" –le signe étant celui de $\varepsilon_k^j \varepsilon_{k\prime}^j$ pour les firmes selon qu'il s'agisse d'un couple de biens input/input, input/output, output/output– pour chaque couple de biens (k, k') et chacun des agents de l'économie, consommateurs ou firmes) :

$$\begin{aligned} \forall i, i', \forall k, k' \qquad \frac{\partial U^i/\partial x_k}{\partial U^i/\partial x_{k'}} &= \frac{\partial U^{i'}/\partial x_k}{\partial U^{i'}/\partial x_{k'}} = \frac{\rho_k}{\rho_{k'}} \\ \forall j, j', \forall k, k' \qquad \frac{\varepsilon_k^j}{\varepsilon_{k'}^j} \frac{\partial F^j/\partial y_k}{\partial F^j/\partial y_{k'}} &= \frac{\varepsilon_k^{j'}}{\varepsilon_{k'}^{j'}} \frac{\partial F^{j'}/\partial y_k}{\partial F^{j'}/\partial y_{k'}} = \frac{\rho_k}{\rho_{k'}} \end{aligned}$$

En second lieu, considérons les multiplicateurs associés aux contraintes de disponibilité des biens (le vecteur ρ). Le multiplicateur ρ_k traduit la rareté du bien k, et, en application d'un des théorèmes d'enveloppe[1] ($\mathcal{L}^*$ caractérisant la fonction valeur du Lagrangien à l'optimum, les dotations initiales apparaissant alors comme les arguments de cette fonction) :

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \Omega_k} = \rho_k$$

la valeur du multiplicateur à l'optimum indiquant la valeur marginale du bien dans une économie efficace et pour des niveaux donnés d'utilité de $I-1$ consommateurs (u_0^i). La variation de bien-être (équivalente à la variation de niveau du Lagrangien) consécutive aux variations de dotations en chacun des biens de niveaux $\Delta\Omega_k$ peut donc être évaluée de telle sorte que :

$$\Delta\mathcal{L}^* = \rho \cdot \Delta\Omega$$

On remarquera que le vecteur des prix implicites ρ est bien indépendant marginalement du (ou des) consommateur(s) qui serai(en)t affecté(s) par la variation du vecteur de dotation $\Delta\Omega$. Mais évidemment, tout comme l'ensemble de la solution, le système de prix implicites dépend de la répartition initiale des richesses (les dotations) qui fait partie des "paramètres" du problème.

[1] Voir les notes consacrées aux théorèmes d'enveloppe en annexe mathématique.

Dans le problème formulé initialement, le consommateur 1 a servi de référence ($\lambda^1 = 1$). A l'optimum, on ne peut plus améliorer le niveau de satisfaction atteint par ce consommateur sans en pénaliser un autre. Les valeurs relatives des multiplicateurs λ^i peuvent être interprêtées comme des niveaux de préférence sociale relative, comme les pondérations des différents consommateurs dans l'évaluation du bien-être global (toujours pour un état Pareto-efficace donné, caractérisé par les niveaux d'utilité u_0^i, avec $u_0^1 = U^1(X^1)$ à l'optimum).

1.2.4 Le rôle du marché

Le second théorème de l'économie du bien-être indique qu'il est toujours possible de décentraliser un état efficace de l'économie par un système de prix concurrentiels et par un ajustement des dotations initiales. Nous avons précédemment caractérisé l'efficacité de l'économie par l'égalité des "tms". Considérons maintenant des niveaux donnés de dotation initale des individus (qui, dans ce modèle, constituent, avec les profits des firmes, les revenus R des consommateurs). Introduisons les marchés qui vont permettre l'échange, et supposons que ces marchés fonctionnent de manière concurrentielle. Cela signifie en particulier que les prix s'imposent à chacun des agents (ceux-ci sont dits "price takers", par opposition à "price-makers" qui renvoie à une analyse en concurrence imparfaite de type monopole / oligopole / monopsone / oligopsone).

Les programmes respectifs des agents, consommateurs ou firmes, sont alors :

$$
\begin{array}{lll}
\max\limits_{X} & U^i(X^i) & \\
sc & p \cdot X^i \leq R^i & (\mu^i)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\max\limits_{Y} & \sum\limits_{k=1}^{K} \varepsilon_k^j p_k y_k^j & \\
sc & F^j(Y^j) \leq 0 & (\nu^j)
\end{array}
$$

Leurs solutions, quand elles existent, suivent nécessairement les conditions du 1er ordre suivantes (suffisantes dès lors que les conditions de quasi-concavité et de convexité évoquées auparavant sont satisfaites) :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U^i}{\partial x_k} &= \mu^i p_k \\
\frac{\partial F^j}{\partial y_k} &= -\varepsilon_k^j \nu^j p_k
\end{aligned}
$$

A partir de là, on retrouve (accessoirement ici) l'égalité des "tms". On montre surtout que les "tms" sont égaux aux rapports de prix :

$$\forall i,i',\forall k,k' \qquad \frac{\partial U^i/\partial x_k}{\partial U^i/\partial x_{k'}} = \frac{\partial U^{i'}/\partial x_k}{\partial U^{i'}/\partial x_{k'}} = \frac{p_k}{p_{k'}}$$

$$\forall j,j',\forall k,k' \qquad \frac{\varepsilon_k^j}{\varepsilon_{k'}^j}\frac{\partial F^j/\partial y_k}{\partial F^j/\partial y_{k'}} = \frac{\varepsilon_k^{j'}}{\varepsilon_{k'}^{j'}}\frac{\partial F^{j'}/\partial y_k}{\partial F^{j'}/\partial y_{k'}} = \frac{p_k}{p_{k'}}$$

1.2.5 Les prix comme "bons" signaux économiques

On peut alors interpréter les prix p comme des indicateurs de coût marginal social ρ des biens rares de l'économie. Il suffit pour cela de rapprocher les relations précédentes des relations caractérisant l'efficacité et faisant apparaître les prix fictifs des biens. Le fait qu'il s'agisse de rapports de prix n'est pas une difficulté (la normalisation des prix peut d'ailleurs conduire à une choisir un à la valeur 1 pour le bien alors considéré comme numéraire).

En corollaire, une variation du bien-être social consécutif à une variation de la dotation de l'économie en ses différents biens est alors évaluée sur la base des prix de l'équilibre concurrentiel. Un projet économique (dont l'enjeu reste tout de même marginal par rapport à l'économie dans son ensemble) visant par exemple à mieux utiliser les ressources de l'économie peut être évalué sur la base des prix du marché. Il sera jugé bénéfique si la somme algébrique des outputs nets valorisés par les prix du marché est positive.

1.2.6 La fonction de bien-être sociale et l'approche utilitariste

La notion de fonction de bien-être social est complexe, comme le montrent la quantité de travaux qui s'y réfèrent. On peut se faire une idée de la subtilité et de la complexité du problème en s'attardant sur des réflexions récentes, par exemple celles que proposent M. Fleurbaey et P. Mongin dans le working paper "The News of the Death of Welfare Economics is Greatly Exaggerated" (http ://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/24/29/31/PDF/2004-12-17-188.pdf). Si l'on accepte l'idée qu'une société puisse s'accomoder d'un arbitrage entre toutes les options offertes à l'économie et tenant compte de l'ensemble des profils individuels classant ces options, la fonction proposée par Bergson-Samuelson $F(x) = W(U^1(x^1), U^2(x^2), ..., U^I(x^I))$ est générale. La fonction W est monotone croissante en chacun de ces arguments (U^i). Maximiser F conduit à comparer les valeurs obtenues pour les différents états efficaces de l'économie.

L'approche utilitariste (Bentham) conduit à retenir une fonction "somme" que l'on peut généraliser en pondérant l'utilité en fonction de l'agent économique :

$$F = \sum a_i U^i$$

D'autres approches sont proposées, de type minimax (Rawls), avec $W = \min_i U^i$.

A partir de la formulation de type Bergson-Samuelson, la variation de bien-être par rapport à l'un des paramètres de l'économie (i.e. les dotations initiales) s'écrit :

$$dW = \sum_{i=1}^{I} \frac{\partial W}{\partial U^i} \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial U^i}{\partial x_k} d\omega_k^i$$

En considérant les variations marginales de bien-être collectif rapportées aux utilités des agents comme des indicateurs de préférence sociale, on retrouve l'interprétation des multiplicateurs λ^i avec $\lambda^i \sim \frac{\partial W}{\partial U^i}$. En se rappelant que $\lambda^i \frac{\partial U^i}{\partial x_k} = \rho_k$ et que $\Omega_k = \sum_{k=1}^{K} \omega_k^i$ on retrouve :

$$dW = \sum_{k=1}^{K} \rho_k d\Omega_k$$

Une FBES de type Bergson-Samuelson donne le niveau de bien-être obtenu pour n'importe quel système de prix et de revenu, les utilités étant évaluées à leur niveau optimal pour chaque valeur du système (i.e. les utilités indirectes) :

$$W = W(V^1(p, R^1), V^2(p, R^2), ..., V^I(p, R^I))$$

Une variation de dotation ω_k^i en bien k pour l'individu i constitue une variation du revenu R^i de ce consommateur : $dR^i = p_k d\omega_k^i$. En application d'un des théorèmes d'enveloppe (appliqué au programme du consommateur de la section 1.2.4), on a aussi : $dV^i = \mu^i \sum_{k=1}^{K} p_k d\omega_k^i$. Une variation de bien-être calculée à partir des utilités indirectes conduit à

$$dW = \sum_{i=1}^{I} \frac{\partial W}{\partial V^i} \mu^i \sum_{k=1}^{K} p_k d\omega_k^i$$

Il est facile de vérifier que "tout se passe bien" si la satisfaction de chaque agent contribue marginalement de la même manière au bien-être global (i.e. $\frac{\partial W}{\partial V^i}$ identiques) et si la variation marginale d'utilité de chaque agent par rapport à l'un des biens - le même bien pour tous les consommateurs - est constante (i.e. $\exists k \, : \, \forall i \, \frac{\partial U^i}{\partial x_k} = c$). Soit $k = 1$ ce bien. En normant les prix de sorte que $p_1 = 1$ (et donc $\mu^i = c$), ce bien, le numéraire, procure donc une même variation marginale constante à chacun des agents[2]. C'est une hypothèse forte (absence d'effet revenu). Au prix de ces 2 hypothèses (contributions marginales identiques de la satisfaction de chacun au bien-être commun et variations marginales constantes identiques de l'utilité de chaque agent par rapport à l'un des biens), la variation de BES exprimée en fonction des utilités indirectes peut être obtenue par la somme des variations de dotation des consommateurs en les différents biens pondérées par les prix de marché.

Apparaît ainsi le problème du calcul des variations individuelles de surplus ("problème d'intégrabilité") résolu dans le cas simple de l'utilité marginale constante par rapport à l'un des biens, que l'on supposera alors être la monnaie. Mais ici non seulement la variation marginale de satisfaction par rapport à la monnaie ne dépend pas de la quantité de monnaie dont dispose le consommateur, mais en plus la monnaie a "la même valeur" pour tous les consommateurs.

Dans l'approche utilitariste habituelle, on utilise souvent l'équivalence d'un des biens pour tous les agents (dans beaucoup d'approches graphiques pour apprécier qualitativement des variations de surplus). Cependant, on utilisera à l'occasion des préférences sociales différentes pour aborder certains problèmes de régulation des marchés intégrant

[2]Et on ne perd pas en généralité à prendre $c = 1$.

leurs effets redistributifs et intégrant d'éventuelles distorsions de l'économie souvent résumée par un coût d'opportunité des fonds publics de type $1 + \lambda$. A titre d'exemple la régulation d'un marché concernant des producteurs (et leurs profits agrégés Π pondérés d'une préférence sociale α), des consommateurs (et leurs variations de surplus agrégé ΔS) et tous en qualité de contribuables (via un budget public B) sera abordée à l'aide d'une FBES du type :

$$W = (1 + \lambda)\Pi + \Delta S - (1 + \lambda)B$$

Mais si l'autre hypothèse se justifie dès lors que les variations considérées sont faibles, l'absence d'effet revenu sera remise en cause en diverses occasions.

Enfin, du fait des conditions d'optimalité associées au programme de maximisation d'utilité sous contrainte de revenu de chacun des consommateurs, on a : $\frac{\partial U^i}{\partial x_k} / \frac{\partial U^{i'}}{\partial x_k} = \mu^i / \mu^{i'}$ indépendant de k,

1.2.7 Variations de surplus

Le problème de "l'intégrabilité" est l'un des problèmes qui se pose lorsque l'on veut définir les variations de surplus des agents en fonctions des prix et des dotations (voir aussi quelques notions utiles dans l'ouvrage "Microeconomics analysis" de H. Varian). En réalité, ce problème se pose "du côté du consommateur". Etudions d'abord le cas du producteur.

Le surplus du producteur est en réalité le profit de son entreprise. En reprenant les notations de la section précédente, en supprimant l'indice des firmes, le programme d'une firme s'écrit :

$$\begin{array}{lll} \max\limits_{Y} & \sum\limits_{k=1}^{K} \varepsilon_k p_k y_k & \\ sc & F(Y) \leq 0 & (\nu) \end{array}$$

La solution primale de ce programme est alors représentée par le vecteur d'output net $Y(p)$ où chacune des composantes y_k^* dépend a priori de l'ensemble des prix p. La fonction de profit, qui est la "fonction valeur" de l'objectif à l'optimum du programme précédent est notée et vaut : $\pi^*(p) = \sum\limits_{k=1}^{K} \varepsilon_k p_k y_k^*(p)$. On la supposera différentiable. La firme étant efficace (i.e. $F(Y^*) = 0$), et grâce aux théorèmes d'enveloppe (voir en annexe), on peut déterminer directement la variation de profit en fonction d'une variation de prix :

$$d\pi^*(p) = \sum_{k=1}^{K} \varepsilon_k y_k^*(p) dp_k$$

Une augmentation du prix d'un output se traduit donc par une augmentation de profit marginalement égale à l'offre de cet output ($\varepsilon_k = 1$). Et une augmentation du prix d'un input se traduit par une diminution de profit marginalement égale à la demande de cet output ($\varepsilon_k = -1$). De plus, compte tenu de la symétrie de la matrice des dérivées secondes, on peut écrire, pour tout couple (k, k') :

$$\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial p_k \partial p_{k'}} = \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial p_{k'} \partial p_k} = \varepsilon_k \frac{\partial y_k^*}{\partial p_{k'}} = \varepsilon_{k'} \frac{\partial y_{k'}^*}{\partial p_k}$$

En conséquence, l'intégrale curviligne $\Delta\pi^*(p^1, p^2)$ est bien définie comme ne dépendant pas du chemin suivi quand on passe d'un système de prix p^1 à un système de prix p^2, dès lors que le système d'offre $y(p)$ est dérivé d'un ensemble de production $F \leq 0$ ayant de "bonnes" propriétés :

$$\Delta\pi^*(p^1, p^2) = \int_{p^1}^{p^2} \sum_{k=1}^{K} \varepsilon_k y_k^*(p) dp_k$$

Il convient de s'assurer de la symétrie des effets prix croisés (au signe près $\varepsilon_k \varepsilon_{k'} = 1$ s'il s'agit d'un couple d'input ou d'un couple d'outputs et $\varepsilon_k \varepsilon_{k'} = -1$ s'il s'agit d'un couple input-output).

On peut donc déterminer la variation de profit à partir de la connaissance du système d'offre. La connaissance des fonctions $y_k^*(p)$ d'offre ($\varepsilon_k = 1$) ou de demande factorielle ($\varepsilon_k = -1$) suffit pour calculer l'impact d'un changement du système des prix sur la fonction de profit d'une entreprise[3]. Mais le calcul direct, à partir de l'observation statistique du système d'offre et de demande par exemple, suppose tout de même que soient vérifiées la symétrie des effets prix croisés ($\varepsilon_k \frac{\partial y_k^*}{\partial p_{k'}} = \varepsilon_{k'} \frac{\partial y_{k'}^*}{\partial p_k}$).

Dans le cas d'une offre mono-produit et mono-facteur, y étant le produit et p son prix, x le facteur et w son prix, et $\{(x, y) \geqslant 0, y \leqslant f(x)\}$ l'ensemble de production caractérisé par la fonction frontière $f(x)$, la fonction de profit est explicitement déterminée à partir de la productivité marginale et du prix relatif w/p : $\pi^*(w, p) = pf \circ f'^{-1}(w/p) - wf'^{-1}(w/p)$. Dans le cas mono-produit (y de prix p), si la technique de production est connue au travers de la fonction de coût $C(y)$, la fonction de profit est obtenue directement à partir de la fonction de coût marginal. La traduction graphique en est immédiate (cf. figure 3).

C'est un peu plus compliqué du côté du consommateur, lorsque l'on veut inférer la variation de satisfaction à partir de la connaissance du système de demande (la fonction U étant réputée inobservable). Toujours avec les notations de la section précédente, en supprimant l'indice caractéristique du consommateur lui-même, les choix du consommateur découle de la résolution du programme suivant :

$$\begin{array}{lll} \max\limits_{X} & U(X) & \\ sc & p \cdot X \leq R & \quad (\mu) \end{array}$$

[3]On peut toujours calculer la variation de profit imputable au passage d'un prix p^1à un prix p^2, qui vaut $\sum\limits_{k=1}^{K} \varepsilon_k p_k^2 y_k^*(p^2) - \sum\limits_{k=1}^{K} \varepsilon_k p_k^1 y_k^*(p^1)$. L'approche intégrale permet de rendre cette variation plus facilement manipulable dans les calculs de bien-être, en particulier quand on veut la dériver.

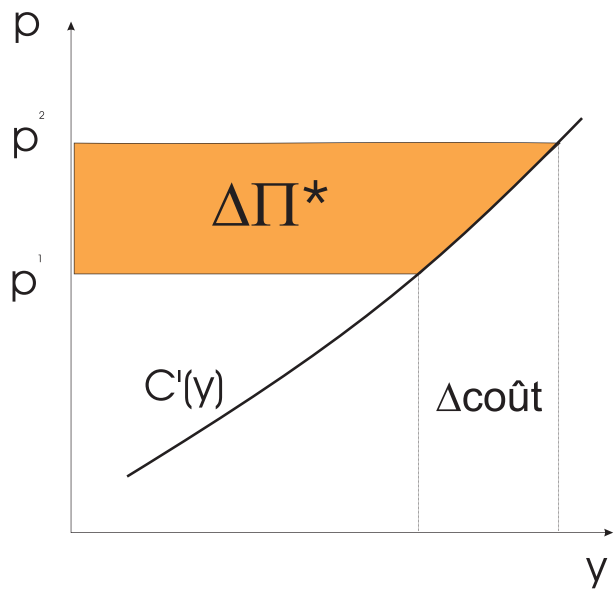


Fig. 3 – Variation de profit d'une firme.

La solution (elle existe sous les "bonnes" hypothèses de monotonicité et de quasi-concavité) est caractérisée par les conditions de Kuhn et Tucker :

$$\begin{aligned} \forall k \quad &: \quad \frac{\partial U}{\partial x_k} = \mu^* p_k \\ \mu^* \quad &> \quad 0, \quad p \cdot X^* = R \end{aligned}$$

On note X^* le système de demande (appelée aussi demande marshallienne), qui dépend du vecteur des prix et du revenu tout comme la valeur optimale μ^* du multiplicateur. Alors, à l'optimum, la contrainte de revenu étant toujours saturée avec l'hypothèse de monotonicité de la fonction U ($p \cdot X^* = R$), la variation de la fonction valeur de ce programme (que l'on appelle utilité indirecte : $U^* = U(X^*(p, R))$) en fonction des variations de prix et de revenu est telle que :

$$dU^* = \mu^* p^* \cdot dX^*$$

et, avec $p^* \cdot dX + dp \cdot X^* = dR$ ($p \cdot X = R$ à l'optimum) :

$$dU^* = -\mu^* X^* \cdot dp + \mu^* dR$$

La connaissance du système de demande ne suffit pas pour le calcul des variations d'utilité indirecte, puisqu'il faudrait connaître également la fonction $\mu^*(p, R)$. Tout se passerait mieux si la valeur du multiplicateur restait constante à l'optimum. Dans ce cas, à une constante multiplicative près (que l'on peut considérer égale à 1 sans perte de généralité), la variation d'utilité indirecte serait égale à la variation de revenu ajoutée à la variation de surplus marshallien ($\Delta S(p^1, p^2) = -\int_{p^1}^{p^2} X^* \cdot dp$) et ne dépendrait alors plus du chemin suivi par les prix et revenu dès lors qu'il y a symétrie de la matrice des effets prix croisés. En effet, les conditions de symétrie requises pour l'intégrale curviligne seraient vérifiées (i.e. $\frac{\partial^2 U^*}{\partial p_k \partial p_{k'}} = \frac{\partial^2 U^*}{\partial p_{k'} \partial p_k} = \frac{\partial x^*_k}{\partial p_{k'}} = \frac{\partial x^*_{k'}}{\partial p_k}$; $\frac{\partial^2 U^*}{\partial p_k \partial R} = \frac{\partial^2 U^*}{\partial R \partial p_k} = \frac{\partial x^*_k}{\partial R} = 0$)[4]. Dans ce cas, il apparaît que la demande X^* ne dépend pas du revenu. On conviendra qu'il s'agit là d'une situation assez particulière. Reste la nécessaire symétrie des effets prix.

Revenons à la fonction d'utilité U et au fait que tout ce qui vient d'être écrit dépend du caractère *constant* du multiplicateur μ^*. Il est un cas simple qui garantit que le multiplicateur soit constant à l'optimum. Il suffit en effet que l'utilité marginale en l'un des biens soit constante (on prendra 1 comme valeur de la constante). Considérons que ce bien soit pris comme numéraire (avec l'indice $k = K = N + 1$). Alors, par les équations de Kuhn et Tucker, on a $\mu^* = \frac{\partial U}{\partial x_{N+1}} = 1/p_{N+1} = 1$. L'hypothèse sur la fonction d'utilité est évidemment forte. Elle signifie que l'augmentation de la satisfaction du consommateur imputable à une unité de numéraire supplémentaire ne dépend pas de la quantité de numéraire dont il dispose. Comme on l'a vu, cette hypothèse se traduit par l'absence d'effet de revenu.

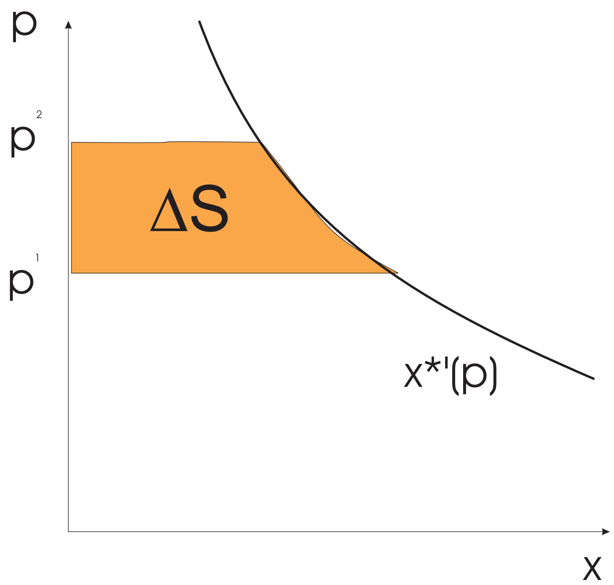


Fig. 4 – Variation de surplus marshallien du consommateur.

Graphiquement, dans une économie à 2 biens (x et le numéraire), le surplus marshallien est à rapprocher de ce qui a été présenté pour les variations de profit. La figure 4 illustre le calcul intégral qui lui est associé.

Il est possible de s'affranchir de cette hypothèse, et plus précisément de s'assurer de l'intégrabilité du surplus marshallien dans un cas un peu plus général (voir en annexe).

L'approche duale permet d'aborder la question du surplus sous un autre angle. Rappelons que cette aproche consiste à représenter le problème du consommateur cherchant

[4]En matière d'intégrale curviligne, on peut aussi se référer aux fonctions "dérivant d'un potentiel" chères aux physiciens.

à minimiser la dépense qui lui permettrait d'atteindre un niveau donné d'utilité. La solution notée $\tilde{X}$ de ce programme est la demande hicksienne. Le programme correspondant s'écrit :

$$\begin{array}{lll} \min\limits_{X} & C(X;p) = p \cdot X & \\ sc & U(x) \geq u & (\nu) \end{array}$$

La fonction valeur (demande compensée) est la fonction $\tilde{C}(p,u) = p \cdot \tilde{X}(p,u)$. Les théorèmes d'enveloppe permettent d'obtenir le résultat connu sous le nom de lemme de Shepard :

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial p} = \tilde{X}$$

Intégrable, mais pas observable. Equations de Slutsky. Voir annexe (à compléter)

2 Régulation des externalités

2.1 Caractérisation d'un état efficace avec effet externe, et décentralisation

2.1.1 Deux exemples en économie d'échange

Deux consommateurs, deux biens (un bien x et un bien numéraire m).
Premier exemple :
Les utilités des consommateurs sont

$$\begin{array}{l} u_1(x_1) + m_1 \\ u_2(x_2) + m_2 - v(x_1) \end{array}$$

Deuxième exemple :
Les utilités des consommateurs sont

$$\begin{array}{l} u_1(x_1) + m_1 \\ u_2(x_2) + m_2 - w(m_1) \end{array}$$

Dans ces deux exemples, le consommateur 2 est affecté négativement par la consommation de l'agent 1, respectivement quand cette consommation porte sur x puis sur m.

Supposons que soit envisagée une régulation par les prix, centrée sur le bien à l'origine de l'externalité.

Dans le premier cas, le couple de taxe ou subvention (τ_1, τ_2) affecte les consommations x, dans le second, le couple (σ_1, σ_2) affecte les consommations m. Il est facile de montrer que les couples de taxes ou subventions doivent respecter les relations suivantes, pour être d'une efficacité maximale :

$$\begin{array}{rcl} \tau_1 - \tau_2 & = & v'(x_1^*) \\ \dfrac{1+\sigma_1}{1+\sigma_2} & = & 1 + w'(m_1^*) \end{array}$$

Dans le cadre d'une application "stricte" du principe pollueur payeur, la taxe appliquée à la seule consommation source de pollution est égale au dommage marginal occasionné, i.e. $\tau_1 = v'(x_1^*)$ et $\sigma_1 = w'(m_1^*)$. Mais même en restant dans le cadre d'une politique de prix portant sur le bien polluant, il y a d'autres solutions (en théorie une infinité à chaque fois) qu'il conviendrait d'adapter au problème réellement posé (l'autre cas limite de la subvention - une taxe négative - de la consommation du bien par le consommateur "pollué" donne : $\tau_2 = -v'(x_1^*)$ et $\sigma_2 = \frac{-w'(m_1^*)}{1+w'(m_1^*)}$).

2.1.2 Externalités différenciées en économie d'échange

A l'exemple du tabac, dont la consommation par un consommateur peut affecter différents consommateurs différemment, et dont l'effet sur un consommateur subissant un dommage peut différer selon le consommateur de tabac ...

2.1.3 Un autre exemple, avec un "secteur de production".

Les biens considérés sont :
- un bien de consommation finale pure y (du blé)
- deux biens de consommation intermédiaire et finale
  - e (l'eau)
  - q (l'engrais, qui sera le numéraire)
- le travail (loisir = temps disponible - temps de travail) l

L'effet externe est due à la consommation d'eau polluée par les nitrates provenant de la consommation factorielle d'engrais.

On repèrera par l'exposant "C" le choix des quantités consommées par la consommateur, et par "E" le choix des quantités produites ou consommées par l'entreprise. Les dotations initiales sont e^0, q^0, l^0 respectivement en eau, engrais, loisir.

La satisfaction du consommateur tirée du panier de biens dont il dispose est résumée par une fonction d'utilité additive telle que :

$$S(y^C, l^0 - l^C, e^C, q^C) = U(y^C, l^0 - l^C, e^C) + q^C$$

quasi-concave et croissante en chacun de ses arguments. Cette fonction est particulière surtout au sens que l'utilité marginale par rapport à q est constante (cela traduira une absence d'effet revenu dans le choix du consommateur). Pour simplifier, si nécessaire, le bien q sera considéré comme numéraire.

La technique de production est résumé par l'ensemble de production suivant, supposé convexe :

$$y^E \leq f(l^E, e^E, q^E)$$

(la convexité de l'ensemble de production est assurée par la concavité de la fonction frontière f).

Dans notre exemple, l'effet externe provient d'un dommage z dû à l'activité de production qui pèse sur le consommateur, et dû plus précisément à la consommation d'engrais (on pense à la concentration en nitrate de l'eau potable). La fonction de dommage est $z = g(q^E)$, supposée croissante. La désutilité du consommateur sensible au dommage s'exprime par un terme additionnel $-v(z)$. On supposera v monotone croissante et convexe.

Caractérisation de l'état efficace en l'absence d'effet externe On peut parler de l'état efficace (et non des états efficaces) car il n'y a ici qu'un consommateur (de surcroit seul propriétaire de l'unique entreprise). C'est un exemple caricatural évidemment, surtout lorsqu'il s'agira de marché concurrentiel. On pourra toujours se convaincre du caractère pertinent de l'approche en supposant un grand nombre de consommateurs identiques (à voir, car infinité d'état eff et quid d'un grand nombre de firmes à rdt échelle décroissant).

Le programme qui caractérise l'état efficace est simplement :

$$\max_{y^C,l^C,e^C,q^C,y^E,l^E,e^E,q^E} S(y^C, l^0 - l^C, e^C, q^C) = U(y^C, l^0 - l^C, e^C) + q^C$$

$$sc \begin{cases} y^E \leq f(l^E, e^E, q^E) & (\psi) \\ y^C \leq y^E & (\rho_y) \\ l^E \leq l^C & (\rho_l) \\ l^C \leq l^0 & (\eta_l) \\ e^E + e^C \leq e^0 & (\rho_e) \\ q^E + q^C \leq q^0 & (\rho_q) \\ \text{et les contraintes de positivité} \end{cases}$$

A l'optimum, avec les hypothèses retenues (sur U et f), les contraintes de positivité étant en général non saturées, les autres contraintes le sont sauf la contrainte "(η_l)" (i.e. $\eta_l = 0$). Toute solution répond aux conditions suivantes tirées des conditions nécessaires d'optimalité (Kuhn et Tücker), en considérant les biens pris deux à deux :

$$\begin{cases} \frac{U'_y}{U'_l} = \frac{1}{f'_l} & (= \frac{\rho_y}{\rho_l}) \\ \\ \frac{U'_y}{U'_e} = \frac{1}{f'_e} & (= \frac{\rho_y}{\rho_e}) \\ \\ \frac{U'_y}{1} = \frac{1}{f'_q} & (= \frac{\rho_y}{\rho_q}) \end{cases}$$

(remarque : $\partial S/\partial q = \rho_q = 1$ dans notre problème).

Décentralisation de l'état efficace par le marché concurrentiel Considérons un ensemble de prix p_a associés aux biens "a" (a étant ici successivement y, q, e, et l). Le prix p_l correspond au salaire. On note π le profit de la firme dont on rappelle que le consommateur est actionnaire non gestionnaire (le profit est incorporé aux revenus du consommateur, mais le choix de la firme en matière de transformation des produits et et le choix du consommateur en matière de consommation sont réalisés indépendamment l'un de l'autre). Dans cette économie, les prix sont supposés s'imposer aux agents ("price takers") et la dotation initiale appartient évidemment au consommateur.

Le choix du consommateur résulte du programme :

$$\max_{y^C,l^C,e^C,q^C} U(y^C, l^0 - l^C, e^C) + q^C$$
$$sc \quad p_y y^C + p_e e^C + p_q q^C - p_l l^C \leq p_e e^0 + p_q q^0 + \pi \qquad (\mu)$$

Le choix de l'entreprise résulte du programme de maximisation du profit :

$$\max_{y^E,l^E,e^E,q^E} p_y y^E - p_e e^E - p_q q^E - p_l l^E$$
$$sc \quad y^E \leq f(l^E, e^E, q^E)$$

Compte tenu de l'absence d'effet revenu, la solution du programme du consommateur implique $\mu = 1/p_q$. Sans perte de généralité, la normalisation des prix (la "solution" étant homogène de degré 1 par rapport aux prix) suggère de retenir $p_q = 1$. La conjugaison des conditions nécessaires d'optimalité tirées des deux programmes conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{U'_y}{U'_l} = \frac{1}{f'_l} & (= \frac{p_y}{p_l}) \\ \\ \frac{U'_y}{U'_e} = \frac{1}{f'_e} & (= \frac{p_y}{p_e}) \\ \\ \frac{U'_y}{1} = \frac{1}{f'_q} & (= \frac{p_y}{p_q}) \end{cases}$$

On retrouve évidemment le résultat général obtenu dans la section 1. Le marché assure l'efficacité (sous de nombreuses hypothèses concernant les caractéristiques des agents - ensemble de production, utilité - et le fonctionnement du marché).

Impact de l'effet externe Le programme qui caractérise l'état efficace est modifié de la façon suivante, en intégrant l'effet du dommage dans la fonction d'utilité du consommateur :

$$\max_{y^C,l^C,e^C,q^C,y^E,l^E,e^E,q^E} U(y^C, l^0 - l^C, e^C) + q^C - v(g(q^E))$$

$$sc \begin{cases} y^E \leq f(l^E, e^E, q^E) & (\psi) \\ y^C \leq y^E & (\rho_y) \\ l^E \leq l^C & (\rho_l) \\ l^C \leq l^0 & (\eta_l) \\ e^E + e^C \leq e^0 & (\rho_e) \\ q^E + q^C \leq q^0 & (\rho_q) \\ \text{et les contraintes de positivité} \end{cases}$$

Pour ne pas multiplier les notations, les variables et leur niveau à l'optimum sont conservées, bien qu'il s'agisse d'économies différentes. Toute solution répond maintenant aux conditions suivantes (on a toujours : $\partial S/\partial q^C = \rho_q = 1$) :

$$\begin{cases} \frac{U'_y}{U'_l} = \frac{1}{f'_l} & (= \frac{\rho_y}{\rho_l}) \\ \\ \frac{U'_y}{U'_e} = \frac{1}{f'_e} & (= \frac{\rho_y}{\rho_e}) \\ \\ \frac{U'_y}{1} = \frac{1+v'g'}{f'_q} & (= \frac{\rho_y}{\rho_q}) \end{cases}$$

en considèrant les 4 biens y, l, e, q deux à deux.

Retour à l'efficacité Les conditions suivantes ne sont manifestement plus respectées par le seul jeu du marché tel que nous l'avons exposé plus haut. L'efficacité peut néanmoins être restituée gràce à différentes modalités de régulation. Il en existe d'autres (la fusion de deux entreprises, par exemple, lorsque l'une est susceptible de polluer l'autre, permet "d'internaliser les effets externes"), mais on fait en général intervenir des instruments "prix" (i.e. les taxes) et les instruments "quantité" (i.e. les droits de pollution). Si le total des droits de pollution est alloué de manière plus ou moins discrétionnaire, l'efficacité sera en réalité compatible avec l'instrument "quantité" si on le complète par un marché des droits (ou selon la présentation du problème : marché des certificats d'abattement, marché des permis d'émissions, ...).

Revenons à l'instrument "prix".

Dans le problème exposé ci-dessus, il existe en réalité plusieurs correctifs possibles à apporter aux prix. On peut en effet taxer le facteur de consommation industrielle polluant q^E, mais on pourrait tout aussi bien taxer le produit de consommation y^C. Il suffit que le rapport soit modifié par un système de taxes tel que soit vérifiée l'égalité entre les rapports :

$$(1 + v'g')\frac{p_y + t_y^E}{p_q + t_q^E} = \frac{p_y + t_y^C}{p_q + t_q^C}$$

Les taxes ou subventions, notées par t_k^j lorsqu'elles affectent le bien k et l'agent j, doivent répondre à la condition générale précédente de sorte qu'il est par exemple équivalent de :

taxer la consommation industrielle d'engrais q^E $(t_q^E > 0)$
taxer la production de blé y^E $(t_y^E < 0)$
taxer la consommation finale de blé y^C $(t_y^C > 0)$
subventionner la consommation finale (i.e. l'épargne) q^C $(t_q^C < 0)$

Mais taxer ou subventionner l'eau n'apparaît pas comme une solution à notre problème.

Principe de parcimonie oblige, pour un même résultat il n'est pas opportun de multiplier les taxes et subventions (il existerait alors une infinité de "solutions"), il suffit de retenir une seule des modalités. Par exemple, $t_y^E = t_y^C = t_q^C = 0$ et $t_q^E/p_q = v'g'$. Ceci revient à taxer le pollueur à hauteur du dommage marginal subi par le consommateur ($t_q^E = v'g'$ puisque p_q est normé à 1).

Cas plus général de pollutions "personnalisées" lorsque pollueurs et/ou pollués affectent ou sont affectés de manière individuelle. Dans ce cas, des systèmes de taxes personnalisées sont en théorie nécessaires.

A compléter.

2.1.4 Exemple d'une agence de l'eau

Prenons l'exemple d'une Agence de l'eau en charge de la régulation du marché de l'eau. L'externalité apparaît entre entre une firme polluante de profit marginal $\pi'(x)$, x

représentant le niveau d'activité de la firme, et un agent (firme ou consommateur) sensible à la pollution occasionnée par cette activité et se traduisant par une désutilité marginale $-u'(x)$. Le schéma 6 montre quel devrait être le niveau optimal, en terme de bien-être social, de la taxe pigouvienne t^+ ou du quota x^+ portant sur le niveau d'activité. En l'absence d'intervention, le niveau d'activité x^* résultant du seul choix de la firme se traduirait par une "perte sociale" indiquée sur le schéma 5.

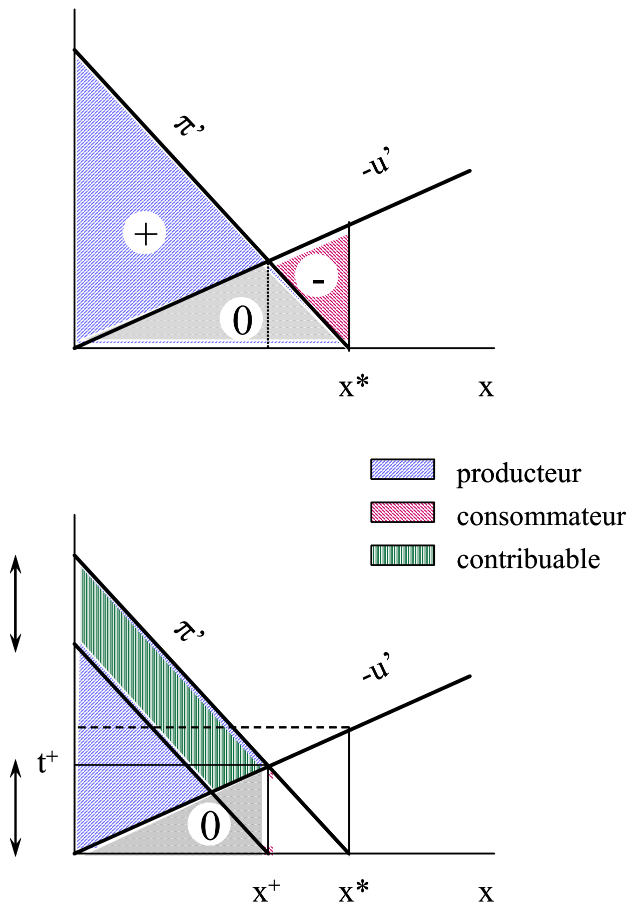


FIG. 5 – Perte sociale due à la défaillance du marché en présence d'un pollueur et d'un pollué.

Taxation, effort de traitement, transfert.

2.2 Plus généralement, plusieurs pollueurs, plusieurs pollués, types variés de pollution

Pollutions locales / globales
Pollutions personnelles / impersonnelles - schéma général de taxation à la Pigou

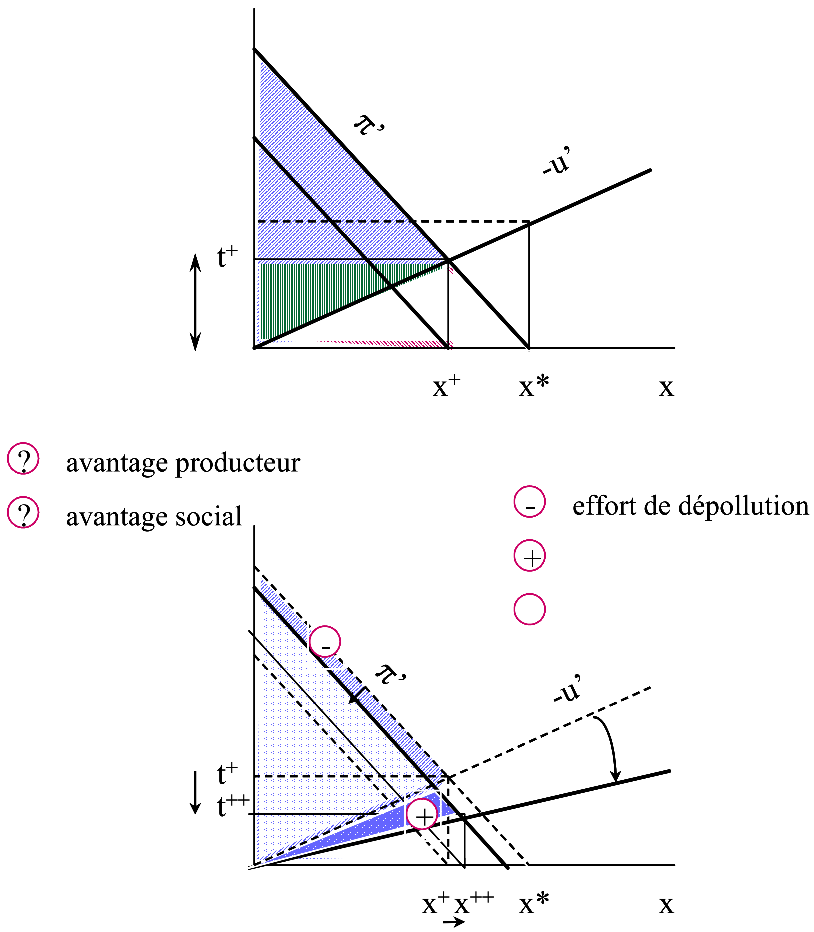


FIG. 6 – Taxation pigouvienne et aide de l'Agence pour le financement de l'abattement de la pollution.

Pollutions ponctuelles / diffuses

3 Externalité : choix de l'instrument en situation d'incertitude

3.1 Changement de paradigme dans la représentation du comportement des agents

Intéressons nous aux gains que peuvent procurer des loteries à des agents qui sont averses au risque. En situation d'incertitude, on admet généralement que représenter le comportement d'un agent au travers de la maximisation de l'utilité du gain n'est plus adapté. Parmi les représentations théoriques proposées, on retirndra l'approche de Von Neuman et Morgenstern (VNM) qui propose de remplacer le critère d'utilité du gain espéré par le critère d'espérance de l'utilité du gain.

La critique du critère de maximisation du profit espéré est aisément mis en difficulté à partir de l'exemple d'un jeu rendu célèbre par Bernouilli. Proposez à un joueur de jouer à pile ou face en lui garantissant un gain de 2^n euros si "pile" tombe pour la première fois au n^{ième} coup. Le droit de jouer est fixé à la somme d. La probabilité que "pile" tombe pour la première fois au n^{ième} coup est égale à 2^n, de sorte que le gain espéré par le joueur est de façon triviale :

$$\pi = \lim_{N\to\infty} \sum_{1}^{N} \frac{2^n}{2^n} - d = \infty$$

Malgré une espérance de gain infini, bien peu de joeurs sont prêts à engager la somme d dès que celle-ci devient importante.

VNM ont proposé une axiomatique qui conduit à substituer la maximisation de l'utilité espérée du profit à la maximisation du profit espéré. En d'autres termes, et de façon plus générale, si le profit π dépend du choix sur des variables x dans un environnement aléatoire θ, le comportement de l'agent n'est plus $\max_x E_\theta \pi(x,\theta)$ (qui équivaut à $\max_x U(E_\theta \pi(x,\theta))$ pour toute fonction U croissante) mais $\max_x E_\theta U(\pi(x,\theta))$. L'utilité du profit est notée U, et E_θ désigne l'opérateur de l'espérance mathématique rapportée à la variable aléatoire θ.

Un agent averse au risque présente une utilité de son profit qui est croissante et concave, et l'on désigne l'indice absolu d'aversion pour le risque par le terme $\beta = -\frac{U''}{U'}$. On peut alors définir la prime de risque p et l'équivalent certain c :

$$\begin{aligned} U(c) &= EU(\pi) \\ p &= E\pi - c \end{aligned}$$

La prime p représente ce que l'agent est prêt à concéder qui lui garantisse le profit maximisant son espérance d'utilité (voir aussi la figure 7).

Ce genre de modèle résume l'approche traditionnelle du choix des actifs en bourse (modèle de Markovitz), dans laquelle ce choix ne dépend pas seulement des espérances de gain mais également de la variance. Donnons une approximation de la prime de risque lorsque le gain est une variable aléatoire suivant une loi normale :

$$\pi = m + \varepsilon \quad avec\ \varepsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

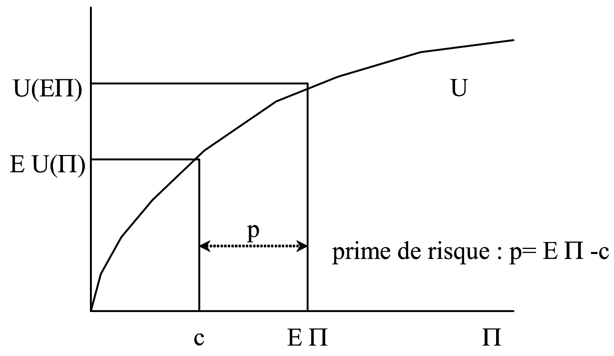


FIG. 7 – Aversion au risque, prime de risque.

Avec les développements limités appropriés, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{au premier ordre} &: \quad U(c) = U(m) - pU'(m) \\ \text{au second ordre} &: \quad U(\pi) = U(m) + \varepsilon U'(m) + \frac{\varepsilon^2}{2} U''(m) \end{aligned}$$

En espérance mathématique sur la 2ème relation, en combinant les 2 relations et utilisant l'indice d'aversion pour le risque, on obtient la relation d'Arrow-Pratt entre la prime de risque et la variance :

$$p = \beta \frac{\sigma^2}{2}$$

Terminons cette introduction en rappelant que le critère de VNM a évidemment lui-même été remis en cause. M. Allais, dans le paradoxe qui porte son nom, propose à un panel de joueurs de comparer 2 à 2 les loteries suivantes :

$$\begin{array}{cccc} \eta_1 : & \begin{array}{c} 10000 \text{ à } 10\% \\ 0 \text{ à } 90\% \end{array} & \eta_2 : & \begin{array}{c} 15000 \text{ à } 9\% \\ 0 \text{ à } 91\% \end{array} \\ \eta_3 : & \begin{array}{c} 10000 \text{ à } 100\% \\ 0 \text{ à } 0\% \end{array} & \eta_4 : & \begin{array}{c} 15000 \text{ à } 90\% \\ 10 \text{ à } 0\% \end{array} \end{array}$$

En général, les joueurs préfèrent la loterie η_2 à la loterie η_1 ($\eta_2 \succ \eta_1$), et la loterie η_3 à la loterie η_4 ($\eta_3 \succ \eta_4$). La fonction d'utilité d'un joueur, définie à une transformation affine près, peut être normalisée de la façon suivante : $u(0) = 0$; $u(10000) = h$; $u(15000) = 1$. Si l'on acceptait l'idée que les joueurs maximisent l'espérance d'utilité de leurs gains, les préférences précédentes se traduiraient par respectivement :

$$\begin{array}{c} \eta_2 \succ \eta_1 \Longrightarrow h < \frac{9}{10} \\ \eta_3 \succ \eta_4 \Longrightarrow h > \frac{9}{10} \end{array}$$

relations manifestement incompatibles. En d'autres termes, il n'est pas si difficile de contredire le critère de l'utilité espérée.

A la suite de M. Allais, de nombreux chercheurs se sont attaqués à l'étude des comportements en univers incertain, tentant d'élaborer des modes de représentations des comportements compatibles avec l'observation (voir par exemple les travaux de C. Gollier). Dans la suite de la section, nous retiendrons le modèle de la maximisation de l'espérance d'utilité.

3.2 Modèle espérance-variance en programmation linéaire. Estimateur sans biais de l'écart type (MOTAD).

Le problème de départ est un programme linéaire qui est supposé refléter le comportement d'un agent neutre vis à vis du risque :

$$\begin{array}{c} \max_x \ \pi = p \cdot x \\ s.t. \quad A \cdot x \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

Si le risque n'est pas pris en compte, le choix optimal du producteur est la solution de ce programme. Supposons maintenant que le vecteur des prix est aléatoire et que le producteur est sensible au risque, l'aversion pour le risque étant mesurée par l'utilité retirée du profit π telle que :

$$\begin{array}{l} \text{Utilité : } U = 1 - e^{-\beta\pi} \\ \text{Aléa : } p \rightsquigarrow \mathcal{N}(\omega, \Omega) \end{array}$$

Avec le critère de l'utilité espérée, le programme de l'agent devient :

$$\begin{array}{c} \max_x \ E_p U(p \cdot x) \\ s.t. \quad A \cdot x \leq b \\ x \geq 0 \end{array}$$

Avec l'hypothèse de nromalité des aléas (discutable, puisque les prix sont positifs !), on a la relation :

$$E_p U(\pi) = 1 - e^{-\beta w \cdot x + \frac{\beta^2}{2} x' \cdot \Omega \cdot x}$$

Maximiser $E_p U(p \cdot x)$ revient à maximiser $w \cdot x - \frac{\beta}{2} x' \cdot \Omega \cdot x$, de sorte que le nouveau programme devient :

$$\begin{array}{c} \max_x \ w \cdot x - \frac{\beta}{2} x' \cdot \Omega \cdot x \\ s.t. \quad A \cdot x \leq b \\ x \geq 0 \end{array}$$

Ce modèle "espérance-variance" peut être résolu en deux temps, via un estimateur linéaire en x et sans biais, ce qui permet de nouveau de faire appel à la programmation linéaire et aux techniques robustes de résolution. Tout d'abord, le programme peut être résolu par le programme suivant, dans lequel ρ est "paramétré :

$$\begin{array}{l} \min_x \; x' \cdot \Omega \cdot x \\ s.t. \quad A \cdot x \leq b \\ \quad x \geq 0 \\ w \cdot x \geq \rho \end{array} \tag{2}$$

L'idée est alors de remplacer le critère $x' \cdot \Omega \cdot x$ par un estimateur sans biais de l'écart type. On note π_t les réalisations, indexées par le temps, de la variable aléatoire π. On dispose de T observations, et la moyenne empirique est notée $\widehat{\pi}_T$. L'estimateur proposé est l'estimateur "MAD" (minimisation of absolute deviation) suivant :

$$\widetilde{\sigma} = \frac{1}{T}\sqrt{\frac{T}{T-1}\frac{\pi}{2}}\sum \mid \pi_t - \widehat{\pi}_T \mid$$

On démontre que cet estimateur est sans biais (voir Hazell et Norton, 1986 ; voir aussi Jayet, 1992, dans "Méthodes et Instruments n°1"). L'intégration dans un programme linéaire est simple, si l'on se rappelle qu'une variable x intervenant par sa valeur absolue peut être remplacée par deux variables, x^+ et x^-, telles que $x = x^+ - x^-$ et $\mid x \mid = x^+ - x^-$. Le programme précédent 2 devient un programme linéaire paramétré par le niveau minimal de revenu espéré ρ dont la solution est notée $\widetilde{x}(\rho)$. La solution du problème "espérance-variance" s'obtient en recherchant le niveau ρ^* qui maximise $w \cdot \widetilde{x}(\rho) - \frac{\beta}{2}\widetilde{x}(\rho)' \cdot \Omega \cdot \widetilde{x}(\rho)$. La difficulté est en réalité de disposer du paramètre d'aversion pour le risque β.

A compléter éventuellement ... Il existe un estimateur MAD du critère $w \cdot x - \frac{\beta}{2}x' \cdot \Omega \cdot x$.

3.3 Taxe, incertitude et aversion au risque, impact

Prenons l'exemple d'un producteur averse au risque, qui dispose de 2 techniques de production utilisant un même facteur x de mise en oeuvre à coût aléatoire et substituables w. Les consommations respectives x_1 et x_2 sont donc de coût respectif w_1 et w_2. Il y a un seul produit, de prix p, et la fonction de production $f(x)$ est concave (ici, pas nécessairement strictement concave).

Les caractéristiques du problème sont résumées par les hypothèses (dans un cadre plus général à n dimensions correspondant à n techniques de production) :

$$\begin{array}{l} \text{Profit : } \pi = pf(x) - w \cdot x \\ \text{Utilité : } U = 1 - e^{-\beta\pi} \\ \text{Aléa : } w \rightsquigarrow \mathcal{N}(\omega, \Omega) \end{array}$$

La fonction d'utilité retenue est une fonction "CARA", avec un indice absolu d'aversion pour le risque qui est ici constant (β). Compte tenu de la normalité de loi de probabilité, maximiser l'espérance d'utilité est équivalent à maximiser le terme d"espérance-variance :

$$E(pf(x) - w \cdot x) - \frac{\beta}{2} V(pf(x) - w \cdot x) = pf(x) - \omega \cdot x - \frac{\beta}{2} x^t \cdot \Omega \cdot x$$

La solution de la maximisation est telle que : $x^* = \frac{1}{\beta}\Omega^{-1}\left(p \bigtriangledown_x f(x^*) - \omega\right)$. Une variation des coûts espérés $d\omega$ implique un changement de consommation factorielle $dx^* = \frac{1}{\beta}\left(pH_x f(x^*) - \Omega\right)^{-1} d\omega$. Notons que les matrices $H_x f$ et Ω sont respectivement semi-définie négative et définie positive.

L'introduction d'une taxe sur le facteur peut être considérée comme une variation de coût. Nous simplifierons le problème avec le gradient $\bigtriangledown_x f$ supposé constant (et donc $H_x f = 0$). On notera τ_j la taxe sur le facteur j.

Comme on va le voir, une taxe inadaptée peut avoir des effets contraires à l'effet recherché, qui est la baisse du dommage. Considérons une fonction de dommage de type :

$$z = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

Une variation du dommage imputable à une taxe considérée comme une variation de coût se calcule alors de la façon suivante :

$$\delta z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_i^{'} \frac{\partial x_i^*}{\partial \omega_j} \tau_j$$

Si les taxes sont déterminées à hauteur du dommage marginal de chacune des activités ($\tau_j = g_j^{'}$), alors l'impact sur le dommage peut s'écrire :

$$\delta z = -\frac{1}{\beta} \tau^t \Omega^{-1} \tau$$

Puisque la matrice de variance-covariance est définie positive, tout jeu de taxes (comptées positivement) se traduit par une dimunition du dommage.

Revenons à notre problème de dimension 2. Supposons maintenant que l'on décide de taxer les deux activités de la même manière, en imaginant que le régulateur ne "sait pas" distinguer les deux types d'activité. On suppose, pour un exemple, que :

$$\Omega = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 25 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans cet exemple, la technique 1 est celle qui supporte une incertitude "plus grande". La matrice inverse est telle que : $\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 25 \end{pmatrix}$.

Que se passerait-il si on ne taxait que l'une des techniques, par exemple la technique 1 (au niveau t_1), et non la technique 2 ? Il est simple de calculer l'impact de la taxe en terme de dommage :

$$\delta z = \frac{1}{\beta}(-g_1^{'} + 4g_2^{'})t_1$$

Il est clair que si la technique "1" est moins de 4 fois plus polluante que la technique "2", la taxe s'avère contreproductive.

Que se passerait-il si on décidait de taxer les 2 techniques au même niveau t ? L'impact en terme de dommage est alors :

$$\delta z = \frac{1}{\beta}(3g_1^{'} - 21g_2^{'})t$$

Si la technique "1" est au moins 7 fois plus polluante que la technique "2", alors le dommage croît avec l'instauration de la taxe.

3.4 Taxe vs marché de droits

On peut aborder le problème en traitant de droits à polluer ou de certificats de qualité, selon que l'on met l'accent sur la pollution, ou sur le bien environnemental (i.e. l'effet de serre ou la qualitè du climat).

Prenons l'exemple de 2 entreprises qui disposent de certificats d'abattement d'une pollution, q désignant la qualité environnementale.

Les fonctions de coût marginal d'abattement (de coût marginal de production de la qualité) sont (éventuellement) différentes. Supposons qu'une distribution initiale de certificats donne q_i^0 à l'entreprise i. Le graphique 8 indique quel pourrait être le prix d'équilibre d'un marché des certificats, dans lequel l'entreprise 1 sera prê à céder à l'entreprise 2 une partie δq de ses certificats.

Le marché de certificats conduit à l'égalité des coûts marginaux d'abattement. Le prix s'ajuste en fonction des fonctions de coûts et des quantités disponibles.

De plus, si le total initialement distribué est égal au niveau socialement optimal, le prix d'équilibre est égal au niveau optimal d'une subvention à produire de la qualité.

Mais parler d'une taxe optimale ou d'un niveau total de certificats suppose que les contributions marginales à "produire de la pollution" sont identiques entre les firmes. Dans le cas contraire, il conviendrait en théorie de définir un jeu de taxes personnalisées, et dans le cas de quotas, de définir un jeu de quota également individualisés. Un marcé de droits à polluer n'a plus la même signification. Il faut par ailleurs ne pas confondre la contribution marginale à polluer et le coût marginal de réduction de la pollution, qui renvoie à la technologie de la firme.

3.5 Incertitude sur le dommage ou sur le coût d'abattement de la pollution

Weizman

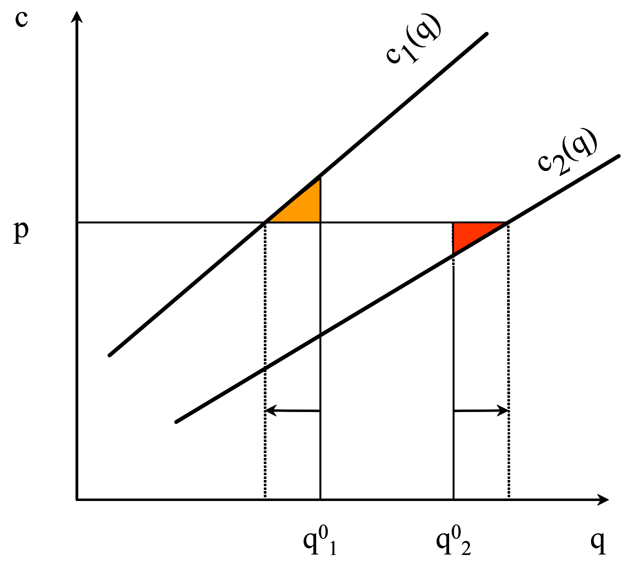


FIG. 8 – Marché d'un "bien" environnemental.

L'incertitude put peser sur le coût d'abattement, ou bien sur la fonction de dommage. Choix pour le régulateur ?

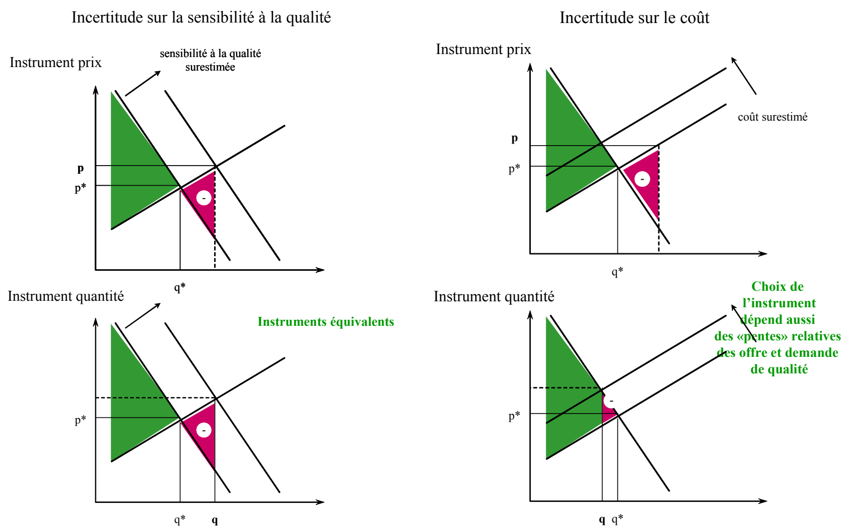


FIG. 9 – **Sélection de l'instrument selon l'incertitude.**

4 Modèle d'équilibre général : une approche dans le cadre d'une économie d'échange

4.1 Quelques caractéristiques d'un modèle économique

équilibre / un côté du marché
LT / CT
sectoriel / général
concurrence parfaite / concurrence imparfaite
statique / dynamique
économétrique / programmation mathématique
estimé / calibré
micro / macro
(problème TeX "parse" :) "calculable" (!)
prévision / prospective

4.2 Un modèle fondamental

Nous avons abordé dans le chapitre 1 les relations entre état efficace de l'économie et équilibre concurrentiel. Reste la question de l'existence d'un tel équilibre (on sait que s'il existe, c'est un état efficace, sous certaines hypothèses). Traitons cette questions en restant dans le pur schéma néo-classique défini auparavant.

Modèle à la Showen & Whalley : considérons une économie d'échange à K biens et I consommateurs. Le vecteur p désigne les prix sur tous les marchés, et Π le vecteur des revenus des consommateurs. On note $\xi_k(p, \Omega)$ les K fonctions d'excès de demande sur tous les marchés. Un marché k est en équilibre au prix p si la somme des demandes des consommateurs n'excède pas la somme des offres sur ce marché, et plus précisément si il y a égalité lorsque le prix p_k est strictement positif. Il y a donc équilibre si $p_k\xi_k = 0$). Il y a équilibre général lorsque tous les marchés sont en équilibre.

Revenons tout d'abord sur la notion d'offre et de demande dans une économie d'échange. Rappelons le programme d'un consommateur i où U^i désigne l'utilité, X^i le vecteur de biens consommés par i, Ω^i le vecteur des dotations initiales du consommateur i en les différents biens :

$$\begin{array}{lll} \max\limits_{X^i} & U^i(X^i) & \\ sc & p \cdot X^i \leq p \cdot \Omega^i & \qquad (\mu^i) \end{array}$$

La solution $\overline{X}^i(p, p \cdot \Omega^i)$ est le vecteur de demande de la part du consommateur i en fonction du vecteur de prix p et du revenu $p \cdot \Omega^i$. Il est facile de vérifier que cette fonction de demande est homogène de degré zéro par rapport au prix ($\overline{X}^i(\lambda p, \lambda p \cdot \Omega^i) = \overline{X}^i(p, p \cdot \Omega^i)$). Il y aura offre ou demande effective en bien k de la part de i si respectivement $\overline{x}^i_k(p, p \cdot \Omega^i) < \omega^i_k$ ou $\overline{x}^i_k(p, p \cdot \Omega^i) > \omega^i_k$. Et enfin (en désignant par Ω la matrice composée des vecteurs de dotations intiales, et par $p \cdot \Omega$ la suite des revenus $p \cdot \Omega^1$, $p \cdot \Omega^2$, ... , $p \cdot \Omega^I$) :

$$\xi_k(p, p \cdot \Omega) = \sum_i \left(\overline{x}_k^i(p, p \cdot \Omega^i) - \omega_k^i \right)$$

Quelque soit le prix p, avec l'hypothèse de monotonicité des utilités U^i, la contrainte de budget de tous les consommateurs est saturée, i.e. $\forall i \; : \; p \cdot X^i = p \cdot \Omega^i$. Le produit scalaire $p \cdot \xi$ est donc nul, comme on le vérifie :

$$p \cdot \xi = \sum_k p_k \xi_k = \sum_k \sum_i \left(p_k \overline{x}_k^i(p, p \cdot \Omega^i) - p_k \omega_k^i \right) = \sum_i \left(p \cdot X^i - p \cdot \Omega^i \right) = 0$$

C'est la loi de Walras.

Proposition 4.1 *Loi de Walras :* $\forall p \; : \; p \cdot \xi(p, p \cdot \Omega) = 0$.

Les prix p et les quantités X sont à valeurs positives (≥ 0), les excès de demande négatifs ($\xi_k \leq 0$) (retour à l'économie réelle : on ne peut disposer des biens en quantité supérieure à ce que l'économie est capable d'offrir).

Corollaire 4.1 *Si* $K-1$ *marchés sont en équilibre, le dernier l'est également.*

Gràce à la propriété d'homogénéité du système d'excès de demande par rapport aux prix, on peut normaliser les prix. On pourrait par exemple retenir $p_K = 1$ (et considérer le bien K comme le numéraire). Nous retenons ici la normalisation suivante :

$$\sum_k p_k = 1$$

L'ensemble des prix appartient au simplexe (figure 10).

Règle de Gale-Nikkaïdo : considérons la transformation suivante, qui, à tout vecteur de prix p, lui associe le vecteur f de même dimension et de composantes :

$$f_k(p) = \frac{p_k + \max\{0, \xi_k(p)\}}{1 + \sum_{j=1}^K \max\{0, \xi_j(p)\}}$$

(pour simplification, on ne fait plus apparaître les "revenus" dans les fonctions d'excès de demande, on raisonne donc pour un niveau donné de distribution des dotations).

Il est clair que la transformation f est une application du simplexe dans lui-même. Par ailleurs, avec les propriétés adéquates sur les utilités, on peut considérer les fonctions d'excès de demande comme continues, de sorte que f l'est aussi. On peut donc appliquer le théorème de point fixe de Brouwer. Il existe une vecteur p^* tel que :

$$\forall k \; : p_k^* = \frac{p_k^* + \max\{0, \xi_k(p^*)\}}{1 + \sum_{j=1}^K \max\{0, \xi_j(p^*)\}}$$

Proposition 4.2 *Le vecteur* p^* *est un prix d'équilibre pour tous les marchés.*

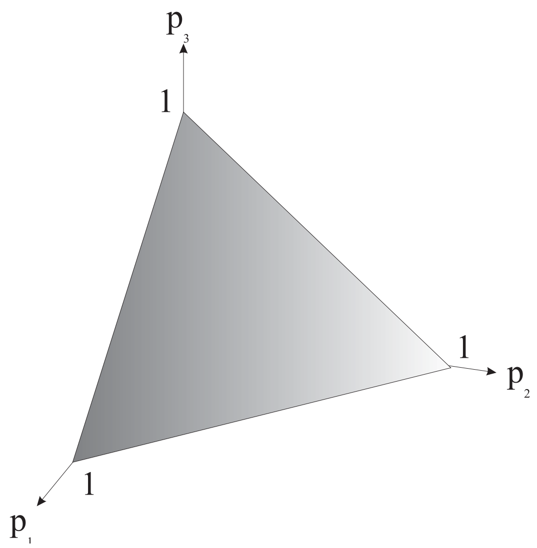


FIG. 10 – Les prix sur le simplexe.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi : $\exists k \; : \; \xi_k(p^*) > 0$. Alors, à partir de l'équation précédente, nous avons :

$$\begin{aligned} \xi_k(p^*) &= \max\{0, \xi_k(p^*)\} = p_k^* \sum_{j=1}^{K} \max\{0, \xi_j(p^*)\} > 0 \\ \forall h &: \max\{0, \xi_h(p^*)\} = p_h^* \sum_{j=1}^{K} \max\{0, \xi_j(p^*)\} \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit que tous les marchés sont en excès de demande positif, dont l'un au moins en excès positif strict, ce qui contredit la loi de Walras.

Nous sommes alors confrontés à la résolution d'un système de $K-1$ équations à $K-1$ inconnues (la loi de Walras et la normalisation du prix enlèvent une dimension au problème).

Algorithme de Scarf.

Maillage du simplexe (au delà de la dimension 3 ? ? ?).

C'est plus compliqué avec une économie comportant un secteur productif (utiliser le théorème de point fixe de Kakutani (?)).

Remarque : dans la recherche de l'équilibre, l'intuition suggère d'augmenter le niveau d'un prix p_k si $\xi_k > 0$ (la hausse du prix étant supposée faire chuter la demande). Par exemple, dans un tâtonnement temporel, en notant $\dot{p}$ la différentielle du prix dans le temps, on pourrait proposer $\dot{p}_k = p_k \xi_k(p)$ (avec la normalisation : $\sum_k dp_k = 0$; avec la loi de Walras : $\sum_k p_k \xi_k(p) = 0$). Mais bien qu'assuré de "se déplacer" sur le simplexe (p est orthogonal au vecteur 1), le processus n'est pas assuré converger vers un prix d'équilibre.

On vient d'aborder l'existence d'un équilibre. Qu'en est-il de l'unicité, puisque l'existence est acquise.

Unicité de l'équilibre (Hahn, 1973), une condition suffisante :

$\frac{\partial \xi_j}{\partial p_k} > 0 \ \forall (j,k), j \neq k$

Hypothèse dite de substituabilité brute, que l'on peut d'ailleurs affaiblir par une hypothèse de matrice des effets prix á diagonale dominante.

4.3 Un essai de modélisation en équilibre simultané sur plusieurs marchés

Un exemple : le modèle MODANI.

Couplage d'un modèle d'offre agricole (cf. le modèle AROPAj) et d'un modèle de transformation industrielle des céréales en aliments du bétail (le modèle ProspectiveAliment conçu au CEREOPA à l'INA-PG).

Equilibre sur les marchés des matières premières agricoles (céréales) et des marchés des aliments concentrés (simples et composés).

Exemples graphiques de recherche d'équilibre "par tâtonnement".

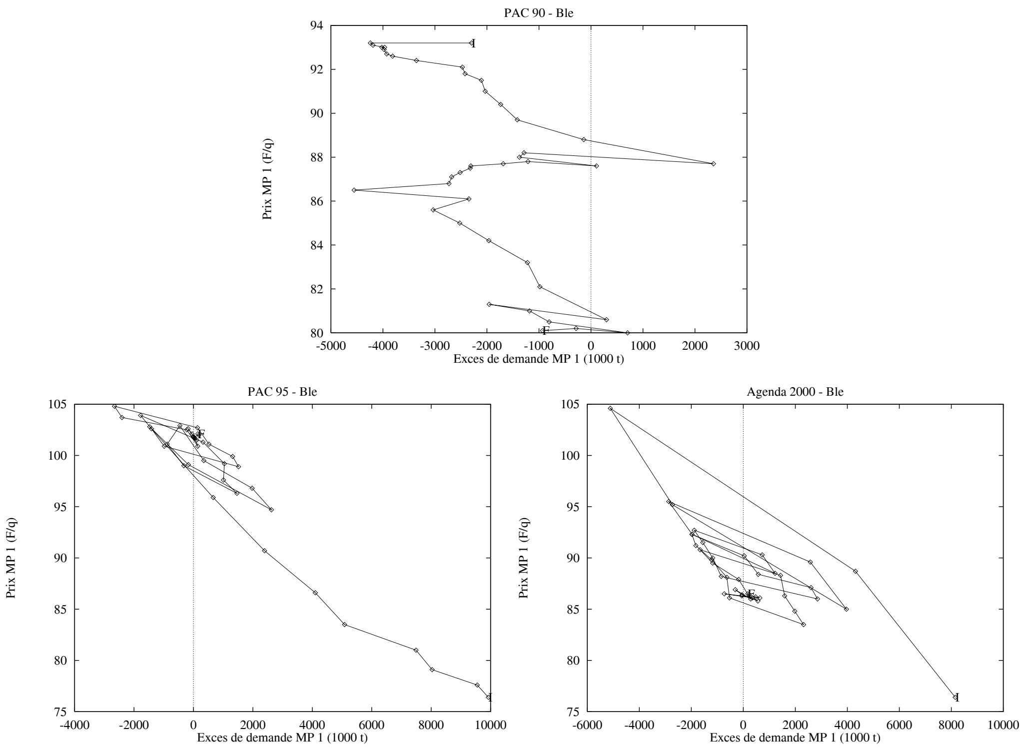


FIG. 11 – **Situation du marché "mp4" après 40 itérations.**

Exemple de recherche de prix d'équilibre par tâtonnement (MODANI), voir la figure 11.

Modèle d'offre : AROPAj (voir les modèles de programmation mathématique, la programmation linéaire, et la présentation proprement dite du modèle en section 6.2).

5 Régulation des marchés agricoles

La Politique Agricole Commune : un ensemble d'instruments pour la régulation des marchés et le soutien des revenus. Les Organisations communes de marché (OCM). Traduit souvent une approche "produit par produit".

Un problème usuel en économie publique sectorielle (Gardner) : quelle est la politique la "plus efficace" (i.e. la moins coûteuse socialement, pour le consommateur-contribuable) qui permette de garantir un niveau donné de revenu des producteurs.

Aides directes compensatrices.

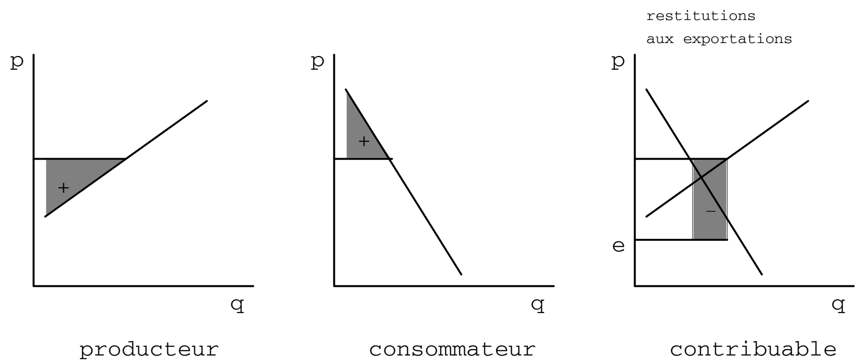


Fig. 12 – Surplus des agents de l'économie nationale dans un plan quantités (q) - prix (p).

On s'intéresse à quelques exemples d'intervention dans une économie "ouverte" (échangeant avec le marché mondial) lorsque l'on veut protéger les marchés domestiques.

5.1 Politique de prix garanti

Donnons l'exemple d'une politique de prix garanti, le marché "domestique" étant protégé par un système de restitution aux exportations (symétriquement un système de prélèvement aux importations). Une question simple : quel serait le prix garanti optimal ? Comme on l'a vu, on peut proposer comme fonction de bien-être social la fonction suivante (ou tout autre fonction affine de W) :

$$W = p\hat{y}(p) - C(\hat{y}(p)) - \int_{p_0}^{p} \bar{y}(u)du - (1+\lambda)(p-e)\left(\hat{y}(p) - \bar{y}(p)\right)$$

où p et e sont respectivement le prix domestique garanti et le prix mondial, $\hat{y}(p)$ et $\bar{y}(p)$ représente l'offre et la demande domestiques. On suppose en outre que le coût d'opportunité des fonds publics λ est supérieur à 1. Dans l'expression précédente, $p\hat{y}(p) - C(\hat{y}(p))$ représente le profit de la firme, $-\int_{p_0}^{p} \bar{y}(p)dp$ la variation de surplus du consommateur, et

$(p-e)(\hat{y}(p)-\bar{y}(p))$ le coût public de l'intervention (positif quand l'offre domestique excède la demande, $p-e$ représentant la restitution unitaire, et négatif dans le cas contraire avec un prélèvement à l'importation).

On fait les hypothèses habituelles pour les fonctions d'offre et de demande ($\frac{d\hat{y}}{dp} > 0, \frac{d\bar{y}}{dp} < 0$), et on formule l'hypothèse du "petit pays" (le prix e reste insensible à l'évolution du marché domestique). Le prix garanti est la variable de commande publique pour ce problème, et la variation de bien-être en fonction du prix est alors :

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dp} &= \left(p-\frac{dC}{dy}\right)\frac{d\hat{y}}{dp}+\hat{y}(p)-\bar{y}(p)-(1+\lambda)(\hat{y}(p)-\bar{y}(p)) \\ &\quad -(1+\lambda)(p-e)\left(\frac{d\hat{y}}{dp}-\frac{d\bar{y}}{dp}\right) \\ &= -\lambda(\hat{y}(p)-\bar{y}(p))-(1+\lambda)(p-e)\left(\frac{d\hat{y}}{dp}-\frac{d\bar{y}}{dp}\right)\end{aligned}$$

puisque $p=\frac{dC}{dy}$ par définition de l'offre. Par hypothèse concernant les effets prix de l'offre et la demande, le terme $\frac{d\hat{y}}{dp}-\frac{d\bar{y}}{dp}$ est toujours postif. Si $\lambda = 0$, il est clair que W passe par un maximum lorsque $p = e$. En d'autres termes, l'intérêt collectif voudrait que l'échange domestique se fasse au prix mondial. Evidemment, ce résultat ne prend en compte aucune des rigidités et des spécificités éventuelles qui pourraient caractériser la production, la consommation et l'échange de ce bien (concurrence, information, simultanéité, incertitude).

Lorsque $\lambda > 0$, si l'excès de demande domestique calculé au prix mondial est positif, alors le prix domestique optimal est supérieur au prix mondial, et si l'excès de demande domestique calculé au prix mondial est négatif, alors le prix domestique optimal est inférieur au prix mondial. L'explication de cet écart entre les prix vient par exemple du fait que des recettes fiscales (lorsqu'il y a prélèvement aux importations) procure un avantage collectif imputable à leur valorisation à un prix $1+\lambda$.

ré-écrire avec la fonction d'excès de demande (cf notes 01/05) ...

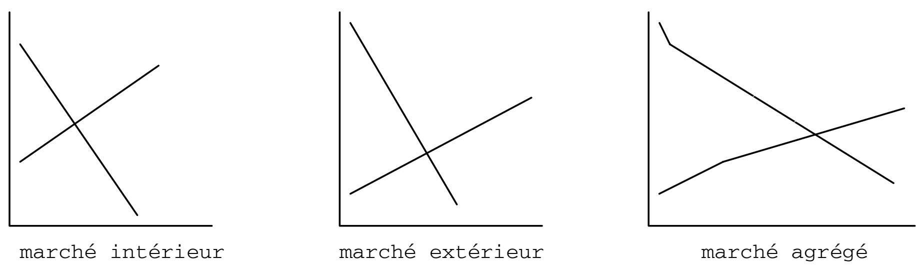


FIG. 13 – Offres et demandes sectorielles des économie nationale, reste du monde, et globale, en économie ouverte.

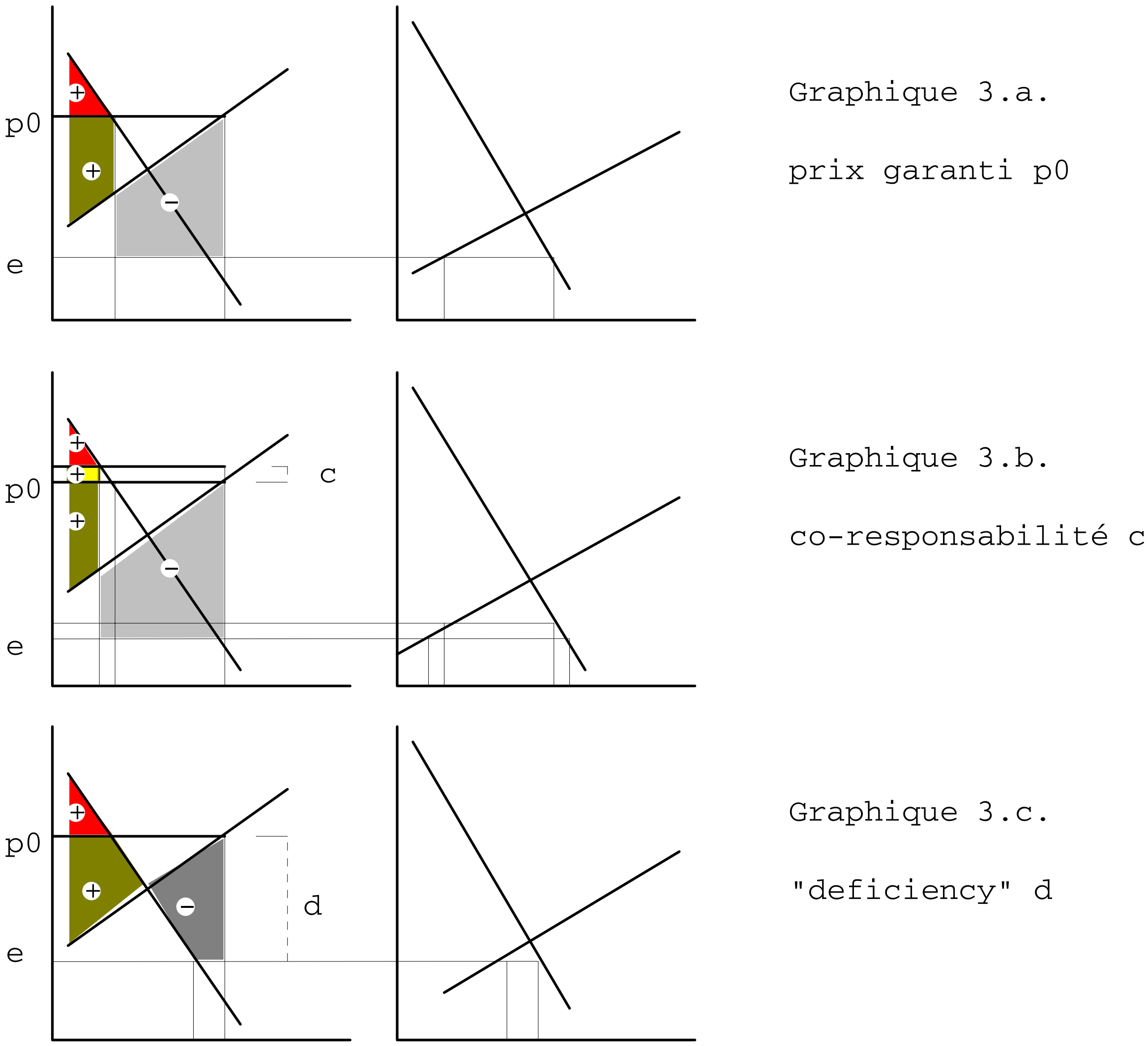


FIG. 14 – **Variations de surplus dans l'économie protégée, à prix net producteur p0 constant (e indique le prix mondial, la situation de l'économie protégée étant associée aux graphiques de gauche) .**

—

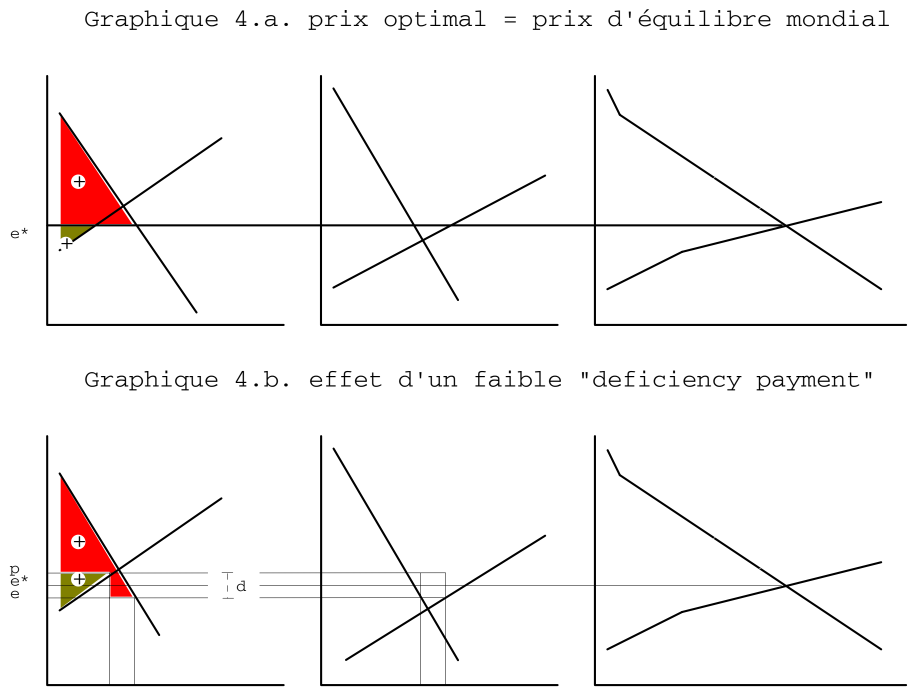


FIG. 15 – **Prix et surplus selon le niveau d'intégration des économies (de gauche à droite : économie intérieure, reste du monde, éonomie globale) .**

5.2 Prix et taxes à la production

Comparer : prix garanti, ”deficiency payment”, taxe de corresponsabilité.

5.3 Le gel de terre

Peut-on justifier le gel de terre, paradoxe alors que certaines régions du monde sont en déficit alimentaire. Si l'on veut se situer sur le plan des principes, il n'y a en premier lieu pas de raison de préférer les quota de production à la limitation d'usage d'un facteur de production.

Justification dans son principe.

Introduction du gel de terre, avec maintien du prix garanti et des restitutions aux exportations, et prime de gel en compensation exacte de la perte de marge. Calcul de la

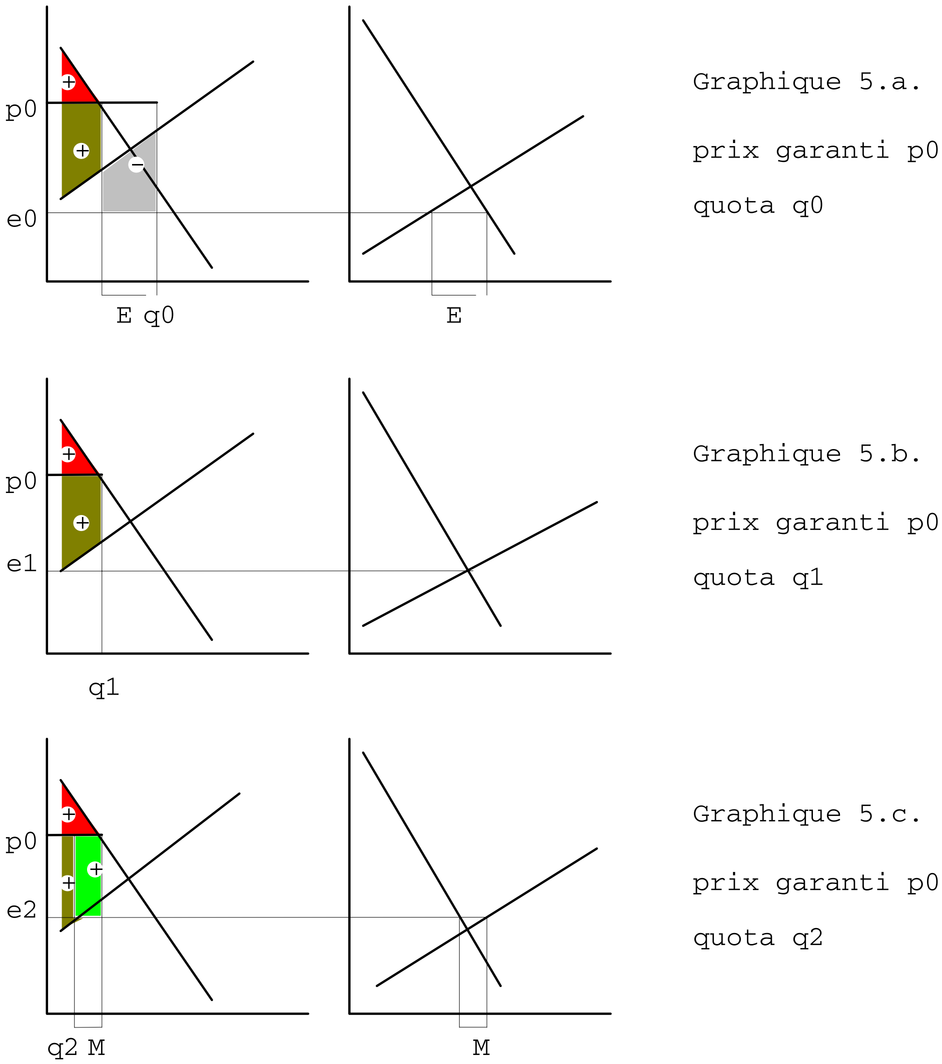


FIG. 16 – **Système de quota et effet de la diminution du quota sur l'économie protégée (situation de l'économie protégée sur les graphiques de gauche, E = exportation, M = importation) .**

variation “producteur+contribuable” avec coût d’opportunité des fonds publics $1+\lambda$, si gel requis d’une unité de surface. $\Delta W = -(1+\lambda)(re-c)$ On retrouve la condition d’intérêt collectif du gel si $r < c/e$.

Prix garanti inchangé (le consommateur est donc "indifférent") : recherche d'un optimum social de "second rang".

<u>Hypothèses particulières</u>

rémunération des quantités produites au prix garanti :	p	(kF/t)
charges variables des terres en production :	c1	(kF/ha)
charges variables des terres en retrait :	c2	(kF/ha)
prime pour les terres en retrait	g	(kF/ha)
prix mondial	e	(kF/t)

<u>Cas n°1 : coût d'opportunité des fonds publics égal à 1</u>

Retrait d'un hectare des terres en production :

Variation de profit des producteurs : $\Delta\pi = -(p\,r - c1) + g - c2$

Variation de la dépense publique : $\Delta B = g - (p - e)\,r$

Variation de surplus social : $\Delta W = \Delta\pi - \Delta B = c1 - c2 - e\,r$

Cette variation est positive tant que le rendement ne dépasse le rendement seuil **rs** : $rs = \frac{c1 - c2}{e}$

La prime de retrait **gs** associée pour que les producteurs soient incités à geler :

$$gs = \left(\frac{p}{e} - 1\right)(c1 - c2)$$

<u>Cas n°2 : coût d'opportunité des fonds publics égal à 1</u>

Le résultat est facilement généralisable quand le coût d'opportunité des fonds publics est égal à $1 + \lambda$ (avec $\lambda > 0$), et $\Delta W = \Delta\pi - (1 + \lambda)\,\Delta B$

Le rendement seuil et la prime seuil valent respectivement :

$$rs = \frac{1}{1+\lambda}\,\frac{c1 - c2}{e} \qquad gs = \left(\frac{1}{1+\lambda}\,\frac{p}{e} - 1\right)(c1 - c2)$$

FIG. 17 – Bénéfice social du gel de terre avec prix garanti imposé et restitutions aux exportations.

simlifier la présentation (notes 01/05) ...

5.4 Droit de douane optimal

(ébauche du commerce stratégique unilatéral).

démonstration simple avec les fonctions d’excès de demande domestique des deux économies (cf notes 01/05) ...

On note $\xi_i(p_i) = \bar{y}_i(p_i) - y_i^*(p_i)$. Les prix domestiques, et la distorsion optimale imposée unilatéralement par $(E1)$ sont tels que :

$$p_1 = p_2 + d$$
$$\xi_1(p_1) + \xi_2(p_2) = 0$$
$$d = -\frac{\xi_2(p_2)}{\xi_2'(p_2)}$$

On remarquera que cette distorsion peut aussi bien la forme d'un droit de douane sur les importations qu'une subventions aux exportations, mais aussi une taxe sur les exportations ou une subvention à l'importation, selon les valeurs des paramètres caractérisant les offres et demandes.

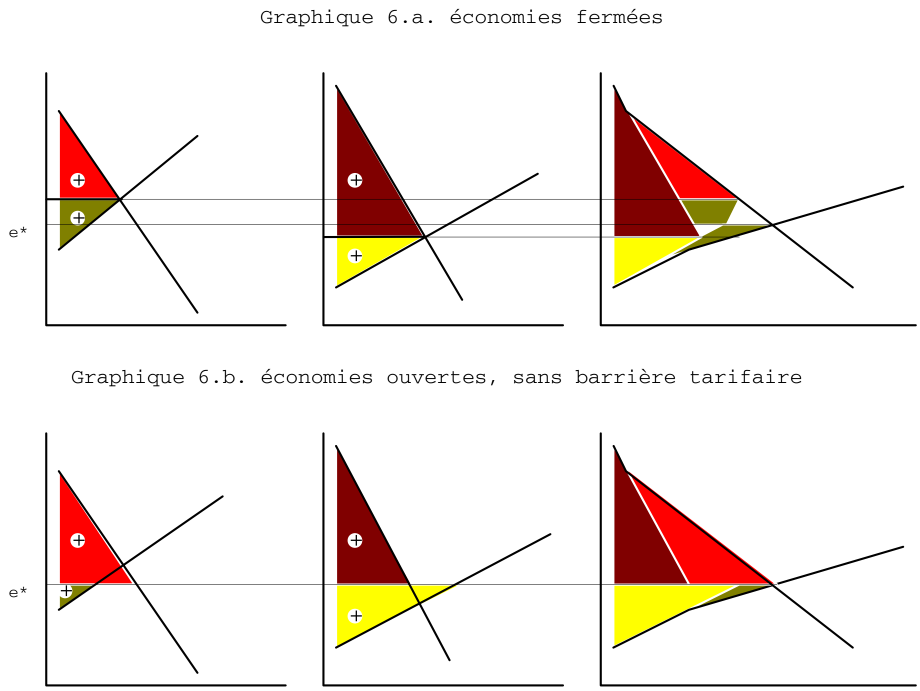


FIG. 18 – **Surplus des économies "intérieure", "reste du monde" et globale, fermées ou ouvertes, et sans barrière tarifaire .**

5.5 La PAC comme un jeu entre Etats membres

Illustrations à partir d'un modèle d'offre et d'un jeu "producteurs-contribuables". Jeu européen (F UK).

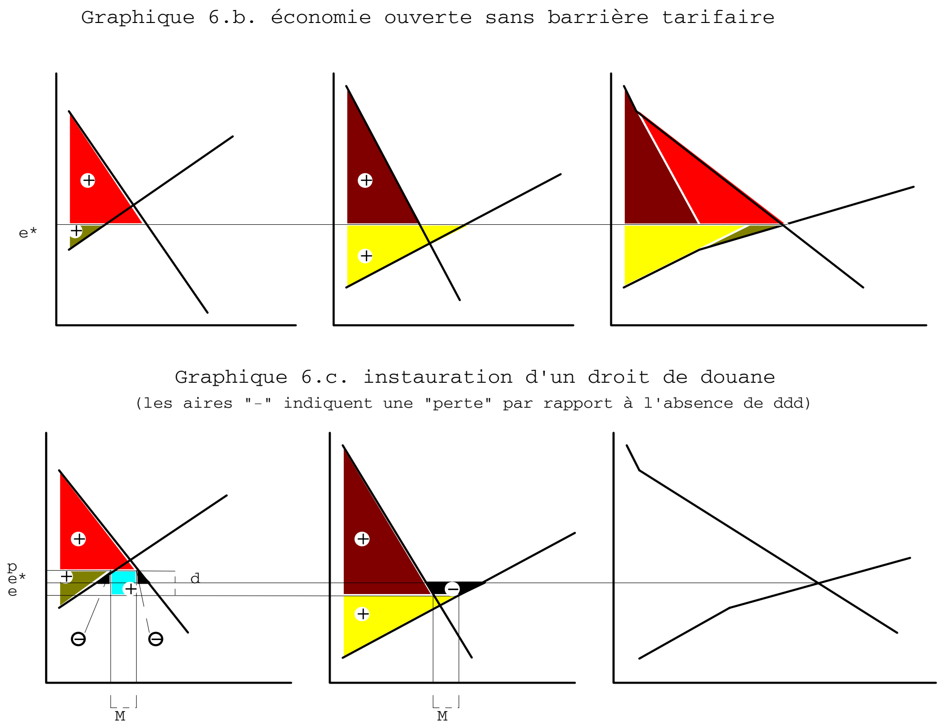


FIG. 19 – **Surplus des économies "intérieure", "reste du monde" et globale - instauration d'un droit de douane (ddd) .**

5.6 Découplage des aides

Principe. Bénéfice attendu de la suppression (/limitation) des distorsions. Découplage "total" (travaux OCDE) ?

Programme GENEDEC.

Transfert des aides directes vers (1) la terre ; (2) l'exploitation agricole ; (3) l'exploitant.

Accord de Luxembourg (juin 2003).

6 Modèle technico-économique et programmation mathématique

6.1 Programmation mathématique

Optimisation sous contraintes.

Catégories de problèmes en programmation linéaire (PL) : transports, capacités, réseaux.

Modèles anciens de programmation mathématique appliqués au secteur agricole. Programmation linéaire mixte (variables réelles et entières) ; en anglais : mixed integer programming (MIP) ; Problèmes avec incertitude et objectif non linéaire (modèle “espérance - variance). Programmation mathématique positive (PMP).

6.1.1 Programmation linéaire

Un problème de programmation linéaire peut s'écrire sous la forme réduite :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{array}{ll} \max_x & \pi(x, p(\alpha)) = p(\alpha) \cdot x \\ sc & \left\{ \begin{array}{ll} A(\alpha) \cdot x \leqslant b(\alpha) & \qquad (\lambda) \\ x \geqslant 0 & \qquad (\mu) \end{array} \right. \end{array}$$

Le vecteur p ($\in \Re^N$) est le vecteur des ”prix”, la matrice A_{MxN} est la matrice des ”coefficients”, le vecteur b est le vecteur des ”ressources”. Les variables de commande sont représentées par le vecteur x ($\in \Re^N$), que l'on suppose positif, et les M contraintes sont ”à l'inégalité”. A ces contraintes, on associe le vecteur λ ($\in \Re^M$) des multiplicateurs de Lagrange (on utilisera pour les nommer les notions de ”prix fictifs”, ”variables duales”, ”coûts d'opportunité” et la traduction anglaise de ”shadow prices” ou ”shadow costs”). Aux contraintes de positivité de x, on peut associer le vecteur des multiplicateurs $\mu \in \Re^N$.

On peut toujours ramener un PL sous cette forme standard. A une variable réelle y, on peut associer 2 variables réelles positives y^+ et y^-, en substituant $y^+ - y^-$ à y. A une contrainte à l'égalité, on peut substituer deux contraintes à l'inégalité identiques au sens de l'inégalité près. Notons qu'on peut intégrer dans un PL la valeur absolue d'une variable y en lui substituant les deux variables y^+ et y^- et en remplaçant $\|y\|$ par $y^+ + y^-$.

On suppose que l'ensemble des coefficients p, A, et b dépendent d'un vecteur de paramètres $\alpha \in \Re^Q$. La solution de ce PL, quand elle existe, sera notée $x^*(\alpha)$ en ce qui concerne les variables primales, et $\lambda^*(\alpha)$ en ce qui concerne les variables duales[5]. Comme les notations le suggèrent, la solution dépend en général des paramètres α. On notera enfin $\pi^*(p(\alpha), A(\alpha), b(\alpha))$ la fonction ”valeur” que prend l'objectif du PL à l'optimum.

A tout problème $(\mathcal{P})$ on peut associer le problème dual $(\mathcal{D})$:

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{array}{ll} \min_x & \psi(\lambda, b(\alpha)) = b(\alpha) \cdot \lambda \\ sc & \left\{ \begin{array}{ll} {}^tA(\alpha) \cdot \lambda \geqslant p(\alpha) & \qquad (x) \\ \lambda \geqslant 0 & \end{array} \right. \end{array}$$

[5]On fait abstraction des variables duales associées aux contraintes de positivité, les variables ”intéressantes” étant en général celles qui sont strictement poistives à l'optimum, les duales associées étant alors de valeur nulle. Néanmoins, quand cela sera nécessaire, on utilisera $\mu^*(\alpha)$ pour désigner ces variables à l'optimum.

Théorème 6.1 *Théorème de dualité : si $(\mathcal{P})$ a une solution, $(\mathcal{D})$ en a une, (x^*, λ^*) est solution de $(\mathcal{D})$ et les valeurs des programmes à l'optimum sont égales (i.e. $p \cdot x^* = b \cdot \lambda^*$).*

Remarque 1 *Interprétation des multiplicateurs (quand la solution existe) : $\lambda^* = \frac{\partial \pi^*}{\partial b}$. Elle donne une mesure de l'impact d'une variation de la "ressource".*

On retrouve un résultat obtenu généralement avec les théorèmes d'enveloppe. On peut d'ailleurs généraliser l'application des théorèmes d'enveloppe, avec précaution puisqu'il faut s'assurer de la continuité locale de la solution.

Remarque 2 *Dégénérescences : en général, un PL a "une" solution, correspondant à un sommet du polygone formé par les hyperplans des contraintes. Mais si l'hyperplan associé à la fonction d'objectif (i.e. $p \cdot x = c$) est parallèle à une variété linéaire forme par l'intersection de 2 ou plusieurs hyperplans des contraintes (depuis une "arrête" par exemple, jusqu'à un hyperplan asscoié à l'une des contraintes), il y a une infinité de solutions en x (dégénérescence primale). On parlera symétriquement de dégénérescence duale lorsque le cas se produit sur le problème dual.*

6.1.2 Programmation mathématique positive

Calibrage (solution “exacte” : on confond en un point solution calculée et observation) ; fonction de coût non linéaire (la solution du programme n'est plus en général une solution “intersection de contraintes”).

Modèle simple de l'approche originale (Howitt et Paris, revisité) : cf présentation de Arfini et Donati (séminaire Athène, 2008).

6.2 AROPAj

Un modèle de l'offre agricole (grandes cultures, élevage)

Fondé sur la programmation mathématique (programmation linéaire en nombres entiers)

Multi-producteur et multi-produit

Procédures automatiques en développement (transparence pour l'utilisateur)

Modulable avec ajouts selon :

- paramètres
- (groupes de) variables et (groupes de) contraintes
- groupes types de producteurs (et par extension : Régions, Etats membres de l'UE)
- module spécifique (voir par exemple la section 6.2.8)
- option de politique agri-environnementale (signature d'une "politique" = combinaison de différentes options parmi la liste enregistrée)

Un exemple d'intégration d'un module d'incitation au gel de terre (version 1988) :

Quelques limites ...

Toutes les activités agricoles n'y sont pas et les surfaces associées aux cultures présentes sont biaisées :

Sont exclues les OTE “vigne”, “horti”, “arbori”, quelques cultures industrielles (coton, tabac, lin, ...)...
Le RICA est “tronqué” ...
...

6.2.1 Objectif

Evaluation d’impacts des politiques agri-environnementales. Au départ, très centré sur la PAC (réformes du début des années 1990).

Centré sur les producteurs et le budget public agricole. On intègre des bilans environnementaux (émission de gaz à effet de serre d’origine agricole, stockage de carbone compris).

6.2.2 Nomenclature

Beaucoup d’objets informatiques différents sont mobilisés, cela requiert une nomenclature appropriée. Nomenclature des fichiers (données, résultats, matrices format MPS, routines sources, exécutables liés aux routines, groupements de commandes (UNIX), ...). Nomenclature des paramètres, des variables, ...

6.2.3 Bases de données

Au départ, dires d’expert et Réseau d’Information Comptable Agricole (RICA). Intérêt : représentativité (mais à l’échelle des ”Régions”), disponibilité pour tous les Etats membres (en devenir pour les Etats candidats à l’UE). Contrainte forte relative à la protection des données individuelles.

Traitements statistiques (logiciel SAS)

En vue : connections avec bases de données ”sol”, ”climat”, ”phéno”.

Systèmes d’Information Géographique (SIG / GIS).

Par ailleurs : informations sur la PAC, modalités de stylisation des politiques d’intervention.

6.2.4 Typologie

Dernière version UE du modèle (2001), échelle UE (101 ”régions”, 734 groupes types de producteurs).

Chaque région est déconcentré en groupes de producteurs agrégés en fonction des orientations techniques. Ce critère est disponible dans le RICA via un index calculé selon l’origine de la marge brute répartie entre les principales productions animales et végétales. Ce critère est croisé avec un critère simplifié d’altitude.

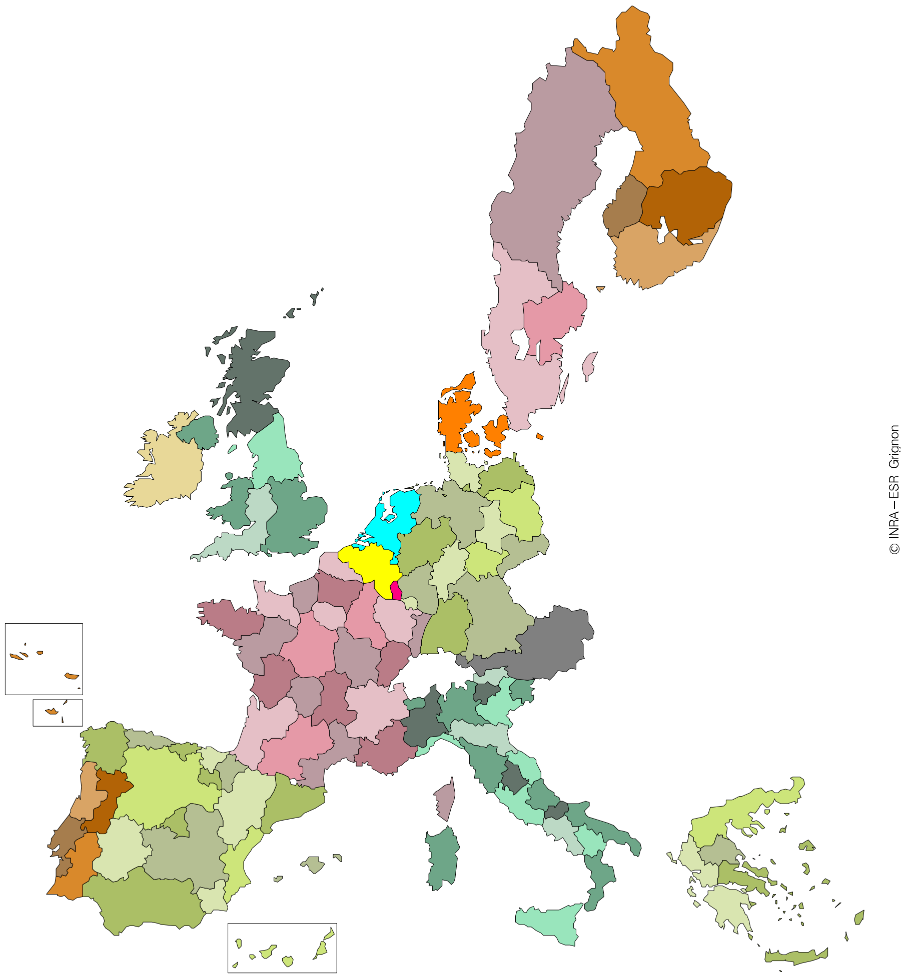


FIG. 20 – Régions "RICA" de l'UE pour les versions UE-15 du modèle AROPAj (données RICA 1997 et 2002).

6.2.5 Estimations

L'ensemble des paramètres du modèle est au départ renseigné sur la base de dires d'experts, et surtout sur la base d'estimations mobilisant les données du RICA pour une année donnée. En 2001, la dernière campagne de données disponibles pour l'UE correspond à l'année 1997.

Les estimations reposent sur des méthodes simples de régession linéaire, depuis l'estimation de moyennes jusqu'à des modèles un peu élaborés d'analyse de covariance (avec test sur les "contrastes"). Chaque type d'estimation n'utilise que les données qui lui directement liées. Par exemple, le calcul des rendements moyens pour chaque groupe type de producteurs et pour chaque culture repose sur l'échantillon associé au groupe type de producteurs.

6.2.6 Calibrage

Le calibrage repose sur le remise en cause des estimations brutes de certains paramètres "sensibles", pour lesquels peuvent se poser des problèmes de cohérence technique ou des problèmes classiques d'estimation (information insuffisante, ...). Le calibrage proposé consiste à déterminer tout un jeu de paramètres parmi l'ensemble des paramètres associé à un groupe type de producteurs. Il repose sur la combinaison de méthodes aléatoires (de type Montecarlo) et des méthodes de gradient. 2000 à 2500 itérations par groupe type.

Schéma de principe : déplacement et rotation de contraintes.

6.2.7 Simulations

Mobilisant un grand nombre de procédures automatiques.

Exemples de résultats.

6.2.8 Extensions

Module effet de serre Voir la section .

Couplage MODANI Voir la section 4.3.

Couplage entre 2 PL : AROPAj et le modèle ProspectiveAliment du CEREOPA à l'INA-PG.

Calcul des rendements agronomiques Fondement mathématique de théorie économique

Utilisation du modèle STICS (couplage modèle biophysique)

6.2.9 Exploitation du modèle

Direction de la Prévision et Commissariat Général au Plan (1993)

Programme FAIR (Eurotools 1997-2000)

GICC (Minstère de l'Environnement) (1999-2005)

DG AGRI (Commission Européenne) (2001-2002, 2003-2006)

FP6-GENEDEC, 2004-2007) Impact calculé par AROPAj de l'accord de Luxembourg sur le coût d'opportunité des terres agricoles.

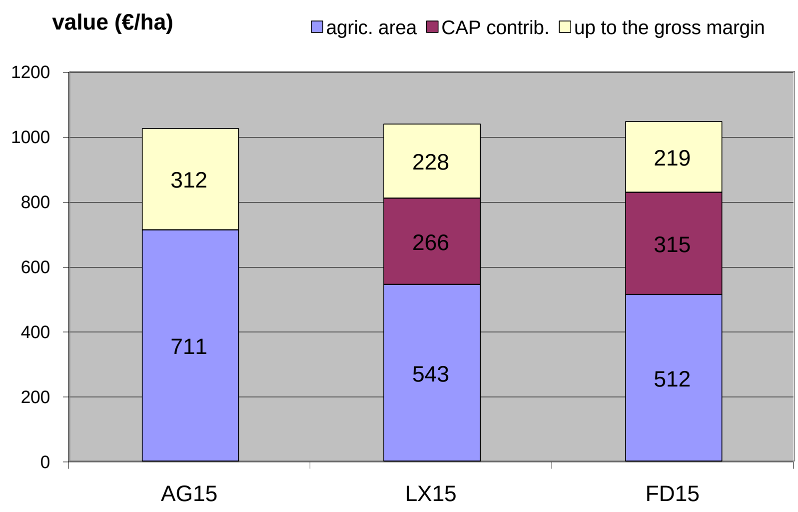


FIG. 21 – Contribution of the surface constraint and the CAP rules explicitly linked with the total land at the farmer's disposal to gross margin (results provided by the AROPAj model for 3 CAP options. 28 farm-groups for which GAMS does not provide the dual solution are excluded from the estimate.)

FP6-INSEA, 2004-2006)

ADD-DST, 2005-2008

6.3 Extension à l'environnement

6.3.1 Emissions de gaz à effet de serre

Evaluation des coûts d'abattement. Régulation "primale" de 1er rang. 2nd rang (taxes animal, taxes aliment).

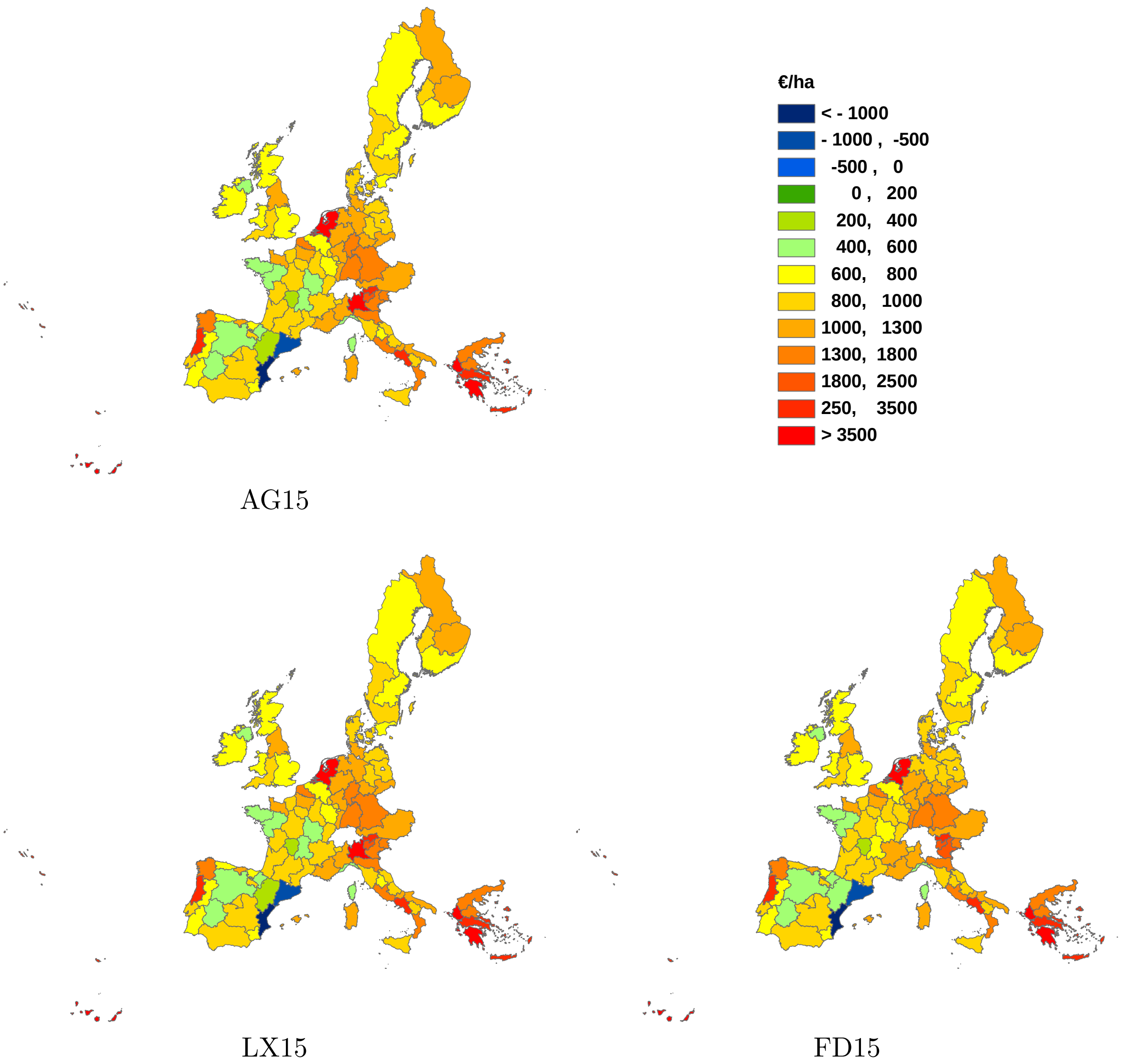


FIG. 22 – Gross margins by hectare in the AG15, LX15 and FD15 scenarios, for land and activities included in the AROPAj model.

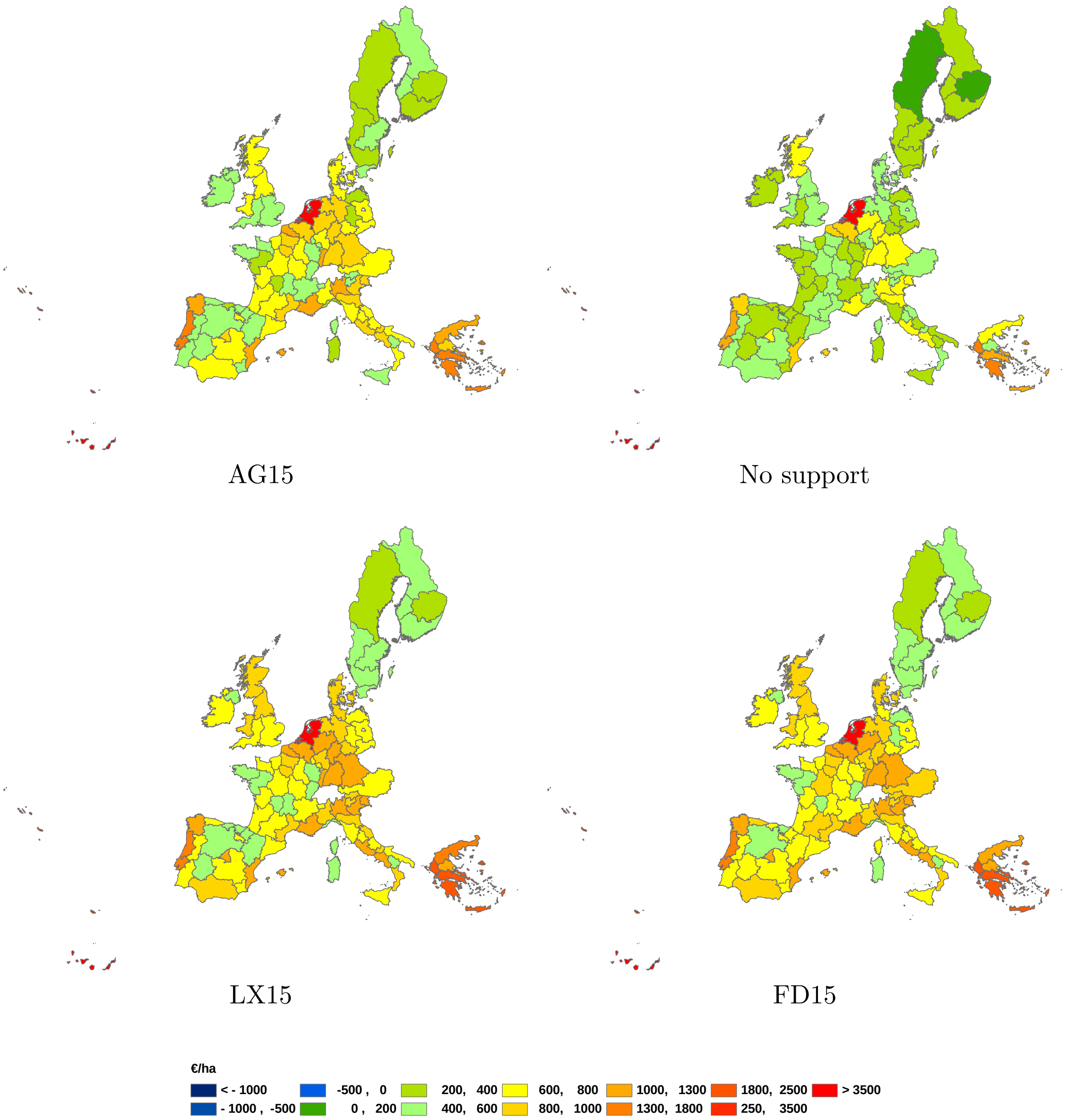


FIG. 23 – Shadow prices of land in the AG15, LX15, FD15 scenarios, and in the case of a "no support" policy for land and activities included in the AROPAj model.

Voir articles :

- De Cara S., Jayet P.A., (2000), **Emissions of greenhouse gases from agriculture : the heterogeneity of abatement costs in France**, European Review of Agricultural Economics, 27(3) : 281-303.
- De Cara S., Houzé M., Jayet P.A., (2005), **Greenhouse gas emissions from agriculture in the EU : a spatial assessment of sources and abatement costs**, Environmental And Resource Economics, vol. 32, nř 4 . pp 551-583.

Puits de carbone, forêt agricole.
Voir articles :

- Jayet P.A., Birfet A., Hofstetter A., (1998), **Forêt paysanne et Politique Agricole Commune : une évaluation des impacts d'une incitation au reboisement**, Cahiers d'Economie et Sociologie Rurales nř48., pp 6-35.
- De Cara S., Jayet P.A., (2000), **Régulation de l'effet de serre d'origine agricole : puits de carbone et instruments de second rang, Économie et Prévision**, vol. 3, nř143-144 "Economie de l'environnement et des ressources naturelles", 2000/06, pp 37-46.
- De Cara S., Jayet P.A., (2006), **Mitigation of greenhouse gas emissions in EU agriculture : An assessment of the costs of reducing agricultural emissions and enhancing carbon sinks in agricultural soils**, Rapport pour le programme FP6-INSEA.

programmes GICC, FP6-GENEDEC (2004-2007), FP6-INSEA (2004-2006).

Intégrer les fonctions de réponse (rendements, émissions N_2O) aux apports d'azote.
Effet d'une taxe de 1^{er} rang sur les émissions, effet de taxes de 2^{nd} rang sur les facteurs supposés responsables des émissions (fertilisants azotés, aliments pour animaux et/ou animaux).
papier S. Durandeau et al., 2007. (voir aussi GENEDEC)

6.3.2 Tassement des sols agricoles

Impacts sur les rendements
Impacts sur les émissions de N_2O
programme ADD-DST (2006-2008)

6.4 Changement d'occupation des terres aricoles

Point de départ : programme FP6 GENEDEC : papier R. Chakir à paraître 2009 : économétrie pour le changement d'échelle et la désagrégation spatiale : localisation probabiliste des activités liées aux sols.

Probabilité de localisation des "exploitations agricoles type" du modèle AROPAj : de la Région à la cellule élémentaire (100m x 100m). Contribution de chacune de ces exploitations type régionales à l'activité agricole de chacune cellule élémentaire géo-référencée.

Distribution spatiale des pollutions azotées : application sur le Bassin de la Seine (regroupant des activités sur 8 régions) dans le cadre du programme PIREN-Seine.

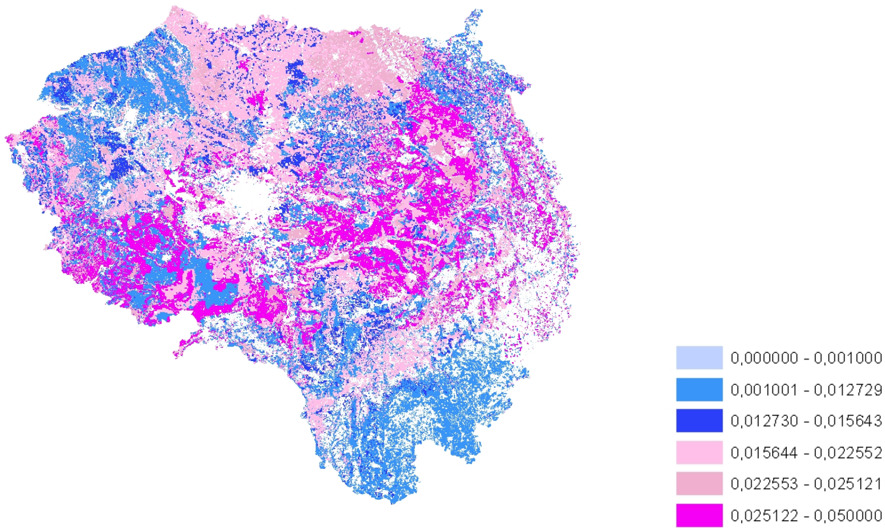


FIG. 24 – Distribution NO_3 sur le Bassin de la Seine - PAC “Agenda 2000”

7 Défaillance du marché : les asymétries d'information

7.1 Exemple de mécanisme direct révélateur

En guise d'introduction, voici sous la forme de jeu d'enchères un problème à la "Groves-Clarke-Vickrey" (voir aussi C. Henry, section 3 chapitre 1 de"Microeconomics for public policy", ou J.J. Laffont "Allocation of public goods" p554, volume 2 du Handbook of public economics, et F. Naegelen, "Les mécanismes d'enchères", pp 61-62.).

Imaginons qu'une collectivité s'attache à la réalisation d'un projet, de coût C. Ce peut être la construction d'un pont entre une île et le continent, les N Agents concernés étant supposés faire preuve d'une disposition hétérogène à payer pour franchir le pont. Les vraies dispositions à payer pour l'utilisation du pont sont θ_i $(1 \leq i \leq N)$. Si ces dispositions à payer sont connues, l'autorité en charge des projets publics sera fondée à ne pas refuser le projet lorsque $\sum_{i=1}^{N} \theta_i \geq C$. Notons y la réalisation du projet ($y = 0$ si le projet est refusé, $y = 1$ s'il est accepté). Naturellement, si les Agents savent qu'ils devront "payer" ce qu'ils déclarent être prêts à payer pour emprunter le pont, ils auront tendance à afficher un moindre intérêt pour le projet. En d'autres termes, nous faisons face à un problème classique d'asymétrie d'information. Si $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, ..., \tilde{\theta}_i, ..., \tilde{\theta}_N)$ est le vecteur des "annonces" effectuées par les Agents, la règle de décision peut s'écrire :

$$y(\tilde{\theta}) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \tilde{\theta}_i \geq C$$

Ainsi édictée, la règle aboutit à augmenter la probabilité que le pont ne se fasse pas alors qu'il aurait dû être réalisé. Le mécanisme de Clarke consiste à modifier la règle de décision de façon à faire supporter par chaque agent le coût public des conséquences de son annonce. Ainsi, chaque agent dont l'annonce individuelle conduirait à modifier le choix final devra supporter un transfert équivalent au coût additionnel que cette annonce implique. Si l'annonce de l'agent i suffit à elle-seule à faire basculer la décision, cet agent en supporte les conséquences en payant un transfert t_i. Un tel agent est appelé "pivot". Notons que tous les Agents peuvent être pivot, de même qu'il peut n'y en avoir aucun. La règle de décision est finalement telle que :

$$(R) \quad \begin{cases} y(\tilde{\theta}) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \tilde{\theta}_i \geq C \\ \\ \forall i : t_i(\tilde{\theta}) = \begin{cases} \mid C - \sum_{j \neq i}^{N} \tilde{\theta}_j \mid \text{ si } \left(C - \sum_{j \neq i}^{N} \tilde{\theta}_j\right)\left(C - \sum_{j=1}^{N} \tilde{\theta}_j\right) < 0 \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Proposition 7.1 *La régle de décision (R) est un mécanisme direct révélateur.*

Avec une telle règle, aucun agent ne gagne à annoncer autre chose que "la vérité". L'utilité d'un agent dépend du choix public de la façon suivante (le régulateur imposant que le coût $\frac{C}{N}$ soit supporté forfaitairement et identiquement par tous les agents) :

$$\begin{aligned} u_i &= -\frac{C}{N} - t_i(\tilde{\theta}) + \theta_i \text{ si } y(\tilde{\theta}) = 1 \\ u_i &= -\frac{C}{N} - t_i(\tilde{\theta}) \text{ si } y(\tilde{\theta}) = 0 \end{aligned}$$

On note Δ_i la différence d'utilité pour l'agent i imputable au fait de "mentir" ($\Delta_i = u_i(\tilde{\theta}_i \neq \theta_i) - u_i(\tilde{\theta}_i = \theta_i)$). La démonstration repose sur l'analyse des différents cas, en adoptant le point de vue d'un agent i quelconque :

- si $\sum_{j\neq i}^N \tilde{\theta}_j \geq C$:
  Compte tenu des annonces des autres, le projet sera réalisé quelque soit l'annonce de l'agent i, même si $\tilde{\theta}_i = 0$, et $t_i = 0$. Il est clair que dire la vérité ou non ne modifie pas l'utilité de l'agent i, et $\Delta_i = 0$.

- si $\sum_{j\neq i}^N \tilde{\theta}_j < C$:
  Les annonces des autres ne suffisent pas à provoquer la réalisation du projet. Analysons les 4 possibilités suivantes.
  * $\sum_{j\neq i}^N \tilde{\theta}_j + \theta_i \geq C$ et $\sum_{j=1}^N \tilde{\theta}_j \geq C$:
    Dans ce cas, même si i ne dit pas la vérité ($\tilde{\theta}_i \neq \theta_i$), le projet sera réalisé, mais $t_i(\tilde{\theta}) = C - \sum_{j\neq i}^N \tilde{\theta}_j$ puisque la réalisation dépend de l'annonce. Cependant $\Delta_i = 0$.
  * $\sum_{j\neq i}^N \tilde{\theta}_j + \theta_i \geq C$ et $\sum_{j=1}^N \tilde{\theta}_j < C$.
    Dire la vérité incite à la réalisation, alors qu'une forte sous-estimation de sa propre évaluation implique la non-réalisation. Dans ce cas : $\Delta_i = -\theta_i + C - \sum_{j=1}^N \tilde{\theta}_j \leq 0$.
  * $\sum_{j\neq i}^N \tilde{\theta}_j + \theta_i < C$ et $\sum_{j=1}^N \tilde{\theta}_j \geq C$.
    C'est l'inverse du cas précédent, mais la variation d'utilité est toujours favorable à l'annonce de la vérité : $\Delta_i = \theta_i - \left(C - \sum_{j=1}^N \tilde{\theta}_j\right) \leq 0$.
  * $\sum_{j\neq i}^N \tilde{\theta}_j + \theta_i < C$ et $\sum_{j=1}^N \tilde{\theta}_j < C$.
    Dans ce cas, $\Delta_i = 0$.

Dans tous les cas, aucun agent n'a intérêt à annoncer autre chose que la vérité ($\Delta_i \leq 0$). QED■

Un autre exemple de mécanisme direct révélateur vient avec les mécanismes d'enchères. Ces derniers existent depuis fort longtemps. On connait l'enchère anglaise au premier prix, ascendante, progressive et ouverte, ou l'enchère hollandaise, de même type mais descendante. Parmi les enchères au premier prix, on trouve aussi certaines procédures d'adjudication et autres appels d'offre, sous pli cacheté, les offres étant simultanées. Les enchères peuvent porter sur un produit (une caisse de vin), un lot (une parcelle de vigne, des quantités variables de céréales européennes destinées aux marchés tiers), un projet (la construction d'une autoroute). Dans les enchères ouvertes et progressives, la mise aux enchères s'arrête lorsqu'il n'y a plus de candidat prêt à surenchérir. Dans les appels d'offres, le "gagnant" est le "mieux-disant" (le prix le plus elevé s'il s'agit d'un produit mis à la vente, le coût le moins élevé s'il s'agit de la réalisation d'un projet).

On suppose ici que les évaluations du bien sont individuelles et privées, et indépendantes (au sens probabiliste du terme). Il n'y a pas non plus collusion entre les Agents.

Le Principal sera celui qui organise l'enchère, les Agents seront les offreurs. Considérons les enchères écrites, sous pli cacheté. Le Principal sera réputé ne pas connaitre la valeur qu'attachent les offreurs au produit soumis à l'enchère. Les enchères au premier prix ne sont pas exemptes de comportement stratégique de la part des offreurs. En effet, ceux-ci peuvent sous-évaluer leurs offres lorsque par exemple ils connaissent la distribution des valeurs individuelles, et ils vont caler leur offre ce qu'ils estiment être la plus haute offre adverse. Cette sous-évaluation est source d'inefficacité, au sens où les biens sont sous-évalués.

Les enchères de Vickrey, au second prix, sont des mécanismes directs qui poussent les offreurs à révéler le véritable prix qu'ils attachent au bien. Mais la connaissance de la vérité a un prix, l'offreur gagnant (celui qui offre le prix le plus élevé dans l'exemple d'un bien mis aux enchères, prix égal à la vraie valeur attachée au produit) bénéficiant d'une rente d'information égale à la différence entre les deux premiers prix. Montrons qu'aucun agent ne gagne à annoncer autre chose que la vérité dans ce type d'enchère. Reprenant les notations de Naegelen, b_i est l'offre de l'agent i et sa véritable évaluation est notée v_i ($1 \leq i \leq N$, on notera aussi $\mathcal{N} = \{1, 2, ..., N\}$). La règle d'attribution est : $A(b_1, b_2, ..., b_i, ..., b_N) = i$ si $b_i = \max_{j \in \mathcal{N}} b_j$. La règle de paiement est $T(b_1, b_2, ..., b_i, ..., b_N) = \max_{\substack{j \in \mathcal{N} \\ j \neq i}} b_j$ si $b_i = \max_{j \in \mathcal{N}} b_j$.

On considère l'agent 1, sans perte de généralité du fait de la symétrie entre les agents. On note y la plus haute offre adverse. Il suffit d'analyser les 6 différents cas (3!) correspondant aux 6 classements possibles des valeurs b_1, v_1 et y lorsque l'agent 1 n'annonce pas la vérité (i.e. $b_1 \neq v_1$). On note Δ l'utilité additionnelle qu'apporte le fait de "mentir" par rapport à l'annonce de la vérité, soit $\Delta = u_1(b_1, y) - u_1(v_1, y)$, l'utilité de l'agent ne dépendant, outre de sa propre évaluation, que de son annonce et de la meilleure annonce adverse. L'utilité est telle que : $u_1 = \left| \begin{array}{c} 0 \text{ si } A \neq 1 \\ v_1 - T \text{ si } A = 1 \end{array} \right.$ Regroupons les situations en deux cas de figure.

Dans le premier cas, l'agent 1 est gagnant (i.e. $b_1 > y$) :

- $v_1 > b_1 > y$
  Dans ce cas, annoncer ou non la vérité ne modifie pas le prix payé par l'offreur : $A(v_1, y) = 1$ et $A(b_1, y) = 1$, et $\Delta = 0$.

- $b_1 > v_1 > y$
  De nouveau $A(v_1, y) = 1$ et $A(b_1, y) = 1$. On a également $T = y$ dans les deux annonces v_1 et b_1. Il vient immédiatement que $\Delta = 0$.

- $b_1 > y > v_1$
  $A(b_1, y) = 1$ et $A(v_1, y) \neq 1$. Annoncer la vérité conduit l'agent à refuser le bien mis à l'enchère (et $u_1 = 0$), tandis que faire la meilleure offre conduit à payer $T = y$, un prix supérieur à la valeur accordée au produit par l'agent ($u_1 = v_1 - y < 0$). Le

choix d'une annonce supérieure à y est donc préjudiciable à l'agent ($\Delta < 0$).

Analysons maintenant le cas où l'agent 1 ne remporte pas l'enchère ($y > b_1$) :

- $v_1 > y > b_1$
  En annonçant la vérité, l'agent 1 remporterait l'enchère ($A(v_1, y) = 1$) alors que ce n'est pas le cas avec l'annonce ($A(b_1, y) \neq 1$). Il vient alors : $\Delta = 0 - (v_1 - y) < 0$.

- $y > v_1 > b_1$
  $A(v_1, y) \neq 1$ et $A(v_1, y) \neq 1$, et $\Delta = 0$.

- $y > b_1 > v_1$
  $A(v_1, y) \neq 1$ et $A(v_1, y) \neq 1$, et $\Delta = 0$.

Dans tous les cas, un agent ne gagne rien à annoncer autre chose que la vérité, il ne perd rien en l'annonçant ($\Delta \leq 0$). QED$\blacksquare$

De façon plus générale, les théorèmes d'équivalence-revenu établissent que l'organisateur des enchères tirera un bénéfice équivalent, indépendamment du système d'enchère proposé (F. Naegelen, p 50, p 68). On peut aussi se reporter à la théorie des enchères optimales, qui repose sur le principe de révélation (Nagelen, p99-).

A compléter ... Voir notes 11/12/98 et 16/02/05

7.2 Problème de sélection adverse

Nous allons nous intéresser à l'approche contractuelle des problèmes que posent les asymétries d'information dans les relations économiques.

La littérature reconnait différents problèmes informationnels, où l'on distingue d'une part la "partie informée" et la "partie non informée", et d'autre part la nature de l'information (voir la présentation générale de B. Salanié, "Théorie des contrats"). Sur le premier point, le rôle de régulation est dévolu au "Principal", les "Agents" effectuant des choix privés pour leur seul intérêt. Sur le scond point, l'information peut porter sur les caractéristiques des Agents, ou sur leurs actions, ou encore sur la qualité de leur produit.

On distinguera donc trois cas, en mettant à part le problème des "biens de confiance".

Dans un problème d'aléa moral, **le Principal ne connait pas l'action de l'Agent** (ce qu'il fait). Ce type de problème se rencontre en assurance automobile.

Dans les problèmes de signal, le Principal est la partie informée qui décide ou non d'afficher "sa" qualité. Ce type de problème met face à face un vendeur, qui connait la qualité de son produit et dispose du moyen de la signaler (par un prix par exemple), et un acheteur qui ne connait pas ex ante la qualité du produit.

Enfin, et c'est ce type de problème qui fait l'objet des sections suivantes de ce chapitre, **le Principal ne connait pas la caractéristique de l'Agent** (qui il est). Ce type de problème se rencontre par exemple en assurance-maladie.

En nous intéressant aux problèmes de sélection adverse, nous considérons comme acquis le principe de révélation. Celui-ci nous dit que le principal ne peut faire mieux que de proposer un mécanisme direct dans lequel il est demandé à l'Agent d'annoncer "qui il est", faisant en sorte que l'Agent n'ait d'autre choix que d'annoncer la vérité.

7.3 Un modèle générique

L'un des premiers articles à traiter de la régulation en situation d'asymétrie d'information est celui de Baron et Myerson, appliqué à la régulation d'un monopole (Econometrica, 1982).

L'agent est de caractéristique inconnue du principal. Il est d'ailleurs équivalent formellement de considérer un continuum d'agents de caractéristiques inconnues. La caractéristique est un paramètre unidimensionnel (la généralisation à un vecteur de caractéristiques est techniquement difficile et semble n'être traitée que par le calcul numérique).

Formellement, le problème du Principal s'apparente à un problème de contrôle optimal. Dans les exemples qui suivent, la relation d'Euler suffit à la résolution des problèmes. On peut en référer à l'annexe mathématique pour la présentation de quelques notions utiles.

7.4 Gel de terre

Bourgeon, Jayet, Picard (EER, 1995), Jayet (Annales d'économie et statistiques, 2001), Jayet et Rotillon (LER 2002).

Travaux sur les wetlands (Kathryn Millock, Anne-Sophie Crépin).

Information parfaite, information imparfaite.

Terres homogènes, terres hétérogènes.

7.4.1 Gel de terre, terres hétérogènes

On suppose que le régulateur connait la répartition des exploitations agricoles indexées par la caractéristique θ sur le support $\Theta = [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ ($\underline{\theta} > 0$, $\overline{\theta} < \infty$). La répartition est caractérisée par la fonction $\Gamma(\theta)$ et la fonction de densité associée $\gamma(\theta)$ supposée positive sur l'intervalle Θ. On suppose que l'effectif total des exploitations agricoles concernées est normalisée à 1. On suppose également que la surface de chaque exploitation est normalisée à 1. On suppose que la distribution des terres en fonction du rendement des parcelles est résumée par par la fonction de répartition $H(r, \theta)$, la densité associée étant notée $h(r, \theta) = \frac{\partial H(r,\theta)}{\partial r}$. Le support de la distribution des rendements est $[\underline{r}, \overline{r}]$.

On suppose enfin que le coût de l'exploitation d'une parcelle quelconque est c (indépendant de r et de θ). Le prix à la production garanti sur le marché intérieur est noté p, tandis que le prix mondial est noté e, que l'on supposera inférieur à p. Le producteur ne met en exploitation que les terres rentables compte tenu du niveau de prix garanti, les parcelles rentables étant celles dont le rendement est supérieur à c/p (on supposera que la borne inférieure du support des rendement est toujours inférieur à ce seuil, pour éviter toute complication d'écriture). La marge brute d'une parcelle en exploitation est donc égale à $pr - c$, et la marge de l'exploitation agricole θ est égale à :

$$\pi(\theta) = \int_{c/p}^{\overline{r}} (pr - c)h(r, \theta)dr$$

Ce profit est en réalité le profit "non régulé", en l'absence de tout programme public d'incitation au gel de terres. On notera que la variation de ce profit par rapport à θ est $\dot{\pi} = -p \int_{c/p}^{\overline{r}} \frac{\partial H(r,\theta)}{\partial \theta} dr$. En considérant que θ est un indice de performance, l'hypothèse de dominance stochastique que l'on formulera plus loin implique la croissance du profit avec θ.

De son côté, dans une politique agricole de référence fondée sur un prix garanti et des restitutions aux exportations pour financer l'exportation des excès d'offre sur le marché protégé (et symétriquement des prélèvements à l'importation quand il y a excès de demande sur le marché protégé), le budget agricole est alors :

$$B = (p - e)\left(\int_{\Theta} \int_{c/p}^{\overline{r}} rh(r, \theta)dr\gamma(\theta)d\theta - y(p)\right)$$

où $y(p)$ représente la demande intérieure. Nous ne traitons ici que de l'introduction du gel de terre, à prix garanti constant. Le critère public se limite donc à une somme algébrique pondérée des marges des producteurs et du budget (affecté par le coût d'opportunité des fonds publics $1 + \lambda$).

On s'intéresse à un programme de régulation fondé sur l'offre individualisée d'une prime en contrepartie d'une part minimale de terres gelées sur l'exploitation, offre que le producteur est libre d'accepter ou de refuser (ce point fait partie de la régulation proposée, on pourrait évidemment s'intéresser à des programmes de gel obligatoire, ou à d'autres formules qui ne sont pas l'objet de ce qui est traité ici).

Information parfaite Supposons dans un premier temps que le régulateur est parfaitement informé des caractéristiques de chaque exploitation agricole. Le contrat proposé à chaque exploitant prend la forme $\sigma(\theta), \tau(\theta)$ où σ est le seuil de gel de terre donnant droit au transfert τ (prime pour l'exploitation, et non prime à l'hectare).

Le producteur qui s'engage à geler une part σ de son exploitation gèlera évidemment les terres les moins productives. On ne se préoccupe pas ici du gel "additionnel" (au delà des parcelles que le producteur aurait geler de toutes façons). Il est clair que les terres gelées sont caractérisées par un rendement seuil $\rho(\theta)$ tel que $\sigma(\theta) = \int_{\underline{r}}^{\rho(\theta)} h(r, \theta)dr = H(\rho(\theta), \theta)$.

On peut écrire directement le programme du régulateur sous la forme :

$$\max_{\sigma(.),\tau(.)} \int_\Theta \left(\int_{\rho(\theta)}^{\overline{r}} (pr-c)h(r,\theta)dr + \tau(\theta) \right) \gamma(\theta)d\theta$$
$$-(1+\lambda)\left[(p-e)\left(\int_\Theta \int_{\rho(\theta)}^{\overline{r}} rh(r,\theta)dr\gamma(\theta)d\theta - y(p) \right) + \int_\Theta \tau(\theta)\gamma(\theta)d\theta \right]$$
$$st \quad \tau(\theta) - \int_{c/p}^{\rho(\theta)} (pr-c)h(r,\theta)dr \geq 0$$

la contrainte signifiant que l'acceptation du contrat n'implique aucune perte de surplus au détriment du producteur à qui le régulateur aurait intérêt à offrir un contrat. Compte tenu du coût social des transferts, il convient de les limiter autant que possible, ce qui signifie que la contrainte est saturée. En d'autres termes, le transfert est une exacte compensation de la perte de marge sur les parcelles gelées du fait du contrat. Le programme du régulateur se simplifie, limité au calcul du rendement seuil :

$$\max_{\rho(.)} \int_\Theta \left[\int_{\rho(\theta)}^{\overline{r}} (pr-c)h(r,\theta)dr - (1+\lambda)(p-e)\int_{\rho(\theta)}^{\overline{r}} rh(r,\theta)dr - \lambda \int_{c/p}^{\rho(\theta)} (pr-c)h(r,\theta)dr \right] \gamma(\theta)d\theta$$

La relation d'Euler fournit une condition nécessaire d'optimalité :

$$(1+\lambda)(e\rho(\theta)-c)h(\rho(\theta),\theta)\gamma(\theta) = 0$$

La condition se résume à :

$$\rho(\theta) = \frac{c}{e}$$

On retrouve un rendement seuil caractérisé par la rentabilité de la parcelle au prix mondial (voir la section 5.3), et ceci quelque soit l'exploitation θ. Le taux de gel est alors égal à $H(c/e,\theta)$ et le transfert égal à $\int_{c/p}^{c/e}(pr-c)h(r,\theta)dr$.

Asymétrie d'information Considérons maintenant la régulation en asymétrie d'information.

Le principe de révélation et le type de contrat proposé nécessitent que le régulateur s'assure que tous les producteurs dont l'acceptation du contrat est souhaité "annoncent" la vérité. Plus précisément, il convient de s'assurer que dire la vérité est la stratégie dominante de ces producteurs. Le mécanisme direct révélateur est donc un contrat $s(\theta), t(\theta)$ où s est le seuil de gel de terre donnant droit au transfert t (comme ci-dessus). A la différence de ce qui précéde, l'agent θ est libre de son annonce $\widetilde{\theta}$. Le programme de l'agent à qui le contrat est proposé est alors :

$$\max_{\widetilde{\theta}} \int_{v(\widetilde{\theta},\theta)}^{\overline{r}} (pr - c)h(r,\theta)dr + t(\widetilde{\theta})$$

$$st\ s(\widetilde{\theta}) \leq \int_{\underline{r}}^{v(\widetilde{\theta},\theta)} h(r,\theta)dr$$

où v est un rendement seuil qui doit permettre à l'agent de satisfaire aux obligations du contrat (geler au moins une part s de sa terre), rendement qui dépend a priori de sa caractéristique et de son annonce. Il est clair qu'il n'est pas de l'intérêt de l'agent de geler au delà de ce qui est demandé. En d'autres termes, la contrainte est saturée : $s(\widetilde{\theta}) = H(v(\widetilde{\theta},\theta),\theta)$. On remarquera que compte tenu de l'asymétrie d'information, la question du gel "additionnel" ne se pose pas (le régulateur peut ne pas avoir les moyens de vérifier le gel avant contrat).

On pourrait montrer que le contrat optimal est nécessairement différentiable par morceaux. Quoiqu'il en soit, on suppose (ou on s'impose) un contrat différentiable[6].

L'annonce optimale doit nécessairement être telle que $\dot{t}(\widetilde{\theta}) - (pv(\widetilde{\theta},\theta) - c)h(v(\widetilde{\theta},\theta),\theta)\frac{\partial v}{\partial \widetilde{\theta}}$, ou encore :

$$\dot{t}(\widetilde{\theta}) - (pv(\widetilde{\theta},\theta) - c)\dot{s}(\widetilde{\theta}) = 0$$

Cette condition sera suffisante pour peu que soit satisfaite la condition du second ordre :

$$\ddot{t}(\widetilde{\theta}) - (pv(\widetilde{\theta},\theta) - c)\ddot{s}(\widetilde{\theta}) - p\dot{s}(\widetilde{\theta})\frac{\partial v}{\partial \widetilde{\theta}} < 0$$

Par ailleurs, par le principe de révélation, le contrat doit être tel que l'annonce optimale soit la vérité pour tout agent contractant. On notera $u(\theta) = v(\theta,\theta)$. La condition d'incitation du premier ordre est alors :

$$\dot{t}(\theta) - (pu(\theta) - c)\dot{s}(\theta) = 0 \tag{IC1gel}$$

que l'on peut différencier : $\ddot{t}(\theta) - (pu(\theta) - c)\ddot{s}(\theta) - p\dot{s}(\theta)\dot{u}(\theta) = 0$. Par ailleurs, avec la relation $s(\widetilde{\theta}) = H(v(\widetilde{\theta},\theta),\theta)$, on a : $h(v,\theta)\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial H(v,\theta)}{\partial \theta} = 0$. L'annonce optimale étant la vérité, la condition du second ordre se résumé à

$$\dot{s}(\theta)\frac{\partial H(u,\theta)}{\partial \theta} > 0$$

On introduit alors une hypothèse de dominance stochastique sur la distribution des caractéristiques, hypothèse à laquelle se plie beaucoup de distributions statistiques usuelles :

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} < 0 \tag{Hd}$$

[6]On notera $\dot{x}$ la différentielle totale d'une fonction x.

La condition du second ordre devient alors :

$$\dot{s}(\theta) < 0 \tag{IC2gel}$$

Outre les conditions d'incitation, le régulateur doit s'assurer que l'agent dont il souhaite l'adhésion au contrat n'y perde pas. La contrainte de participation fait intervenir la rente que l'information privée procure au producteur. Cette rente est la différence entre les profits régulé et non régulé :

$$\begin{aligned} R(\theta) &= \int_{u(\theta)}^{\overline{r}} (pr-c)h(r,\theta)dr + t(\theta) - \int_{c/p}^{\overline{r}} (pr-c)h(r,\theta)dr \\ &= t(\theta) - \int_{c/p}^{u(\theta)} (pr-c)h(r,\theta)dr \end{aligned}$$

Le contrainte de participation est alors :

$$t(\theta) - \int_{c/p}^{u(\theta)} (pr-c)h(r,\theta)dr \geq 0 \tag{IPgel}$$

Le contrat étant supposé différentiable, la rente l'est aussi. On a :

$$\dot{R}(\theta) = \dot{t}(\theta) - (pu(\theta)-c)h(u,\theta)\dot{u}(\theta) - \int_{c/p}^{u(\theta)} (pr-c)\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta)dr$$

Par ailleurs, on a $\dot{s}(\theta) = h(u,\theta)\dot{u}(\theta) + \frac{\partial H(u,\theta)}{\partial \theta}$. Combiné à la condition d'incitation du premier ordre, cela nous conduit à :

$$\dot{R}(\theta) = (pu(\theta)-c)\frac{\partial H(u,\theta)}{\partial \theta} - \int_{c/p}^{u(\theta)} (pr-c)\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta)dr = \int_{c/p}^{u(\theta)} (pr-c)\frac{\partial H}{\partial \theta}(r,\theta)dr$$

Le régulateur incite à geler des terres qui ne le seraient pas ($u(\theta) > c/p$). Avec l'hypothèse de dominance stochastique, cela signifie que la rente est nécessairement décroissante.

Notons B l'ensemble des agents à qui le contrat est offert. Puisque la rente est décroissante, si le contrat est proposé à un agent θ, il est de l'intérêt du régulateur que le contrat soit proposé à tout θ' inférieur à θ, puisque les agents de caractéristique inférieure à θ non conviés au contrat auraient intérêt à se faire passer pour l'agent θ. On peut le comprendre en considérant que l'agent θ' pourrait disposer d'une rente positive en acceptant le contrat de l'agent θ. En effet, en acceptant ce contrat et donc en se faisant passer pour θ, θ' bénéficiera de la prime accordée à θ en acceptant de geler une part de terre qui ne sera pas contraignante pour lui (il est moins "efficace"). Il ne peut donc que gagner à se faire passer pour θ.

En d'autres termes, B est un intervalle de la forme $[\underline{\theta}, b]$. L'agent b est l'agent pivot pour qui il est indifférent de contracter ou de ne pas contracter.
Voir notes du 16/02/05 pour compléter et argumenter

Le programme du régulateur est de maximiser la somme des profits diminuée du coût du budget, sous les conditions d'incitation et de participation définies ci-dessus :

$$\max_{s(.),t(.)} \int_B \left(\int_{u(\theta)}^{\overline{r}} (pr-c)h(r,\theta)dr + t(\theta) \right) \gamma(\theta)d\theta + \int_{\Theta/B} \left(\int_{c/p}^{\overline{r}} (pr-c)h(r,\theta)dr \right) \gamma(\theta)d\theta$$
$$-(1+\lambda) \left[(p-e) \left(\int_B \int_{u(\theta)}^{\overline{r}} rh(r,\theta)dr\gamma(\theta)d\theta + \int_{\Theta/B} \int_{c/p}^{\overline{r}} rh(r,\theta)dr\gamma(\theta)d\theta - y(p) \right) + \int_B t(\theta)\gamma(\theta)d\theta \right]$$
$$st \quad \text{IC1gel, IC2gel, IPgel}$$

La maximisation de ce programme par rapport aux fonction s et t se transforme assez simplement en une maximisation par rapport à la fonction de rendement seuil u. Il suffit d'intégrer par partie le terme qui fait apparaître le transfert t, en utilisant la condition du premier ordre. La condition de participation interviendra dans l'ajustement du contrat pour l'agent pivot b. La condition d'incitation du 2nd ordre devra être vérifiée ex-post. Le terme en "t", avec les développements adéquats est le suivant :

$$\begin{aligned}
-\lambda \int_B t(\theta)\gamma(\theta)d\theta &= -\lambda t(b)\Gamma(b) + \lambda \int_B \dot{t}(\theta)\Gamma(\theta)d\theta \\
&= -\lambda t(b)\Gamma(b) + \lambda \int_B (pu(\theta)-c)\dot{s}(\theta)\Gamma(\theta)d\theta \\
&= -\lambda \left(t(b) - (pu(b)-c)s(b)\right)\Gamma(b) \\
&\quad -\lambda \int_B H(u(\theta),\theta) \left(p\dot{u}(\theta)\Gamma(\theta) + (pu(\theta)-c)\gamma(\theta) \right) d\theta
\end{aligned}$$

L'objectif public peut se ré-écrire sous la forme˜ :

$$\begin{aligned}
W = & \int_B \left[\int_{u(\theta)}^{\overline{r}} \left(pr - c - (1+\lambda)(p-e)r\right) h(r,\theta)dr\gamma - \lambda H(u,\theta) \left(p\dot{u}\Gamma + (pu-c)\gamma \right) \right] d\theta \\
& - \lambda \left(t(b) - (pu(b)-c)s(b)\right)\Gamma(b) + \int_{\Theta/B} \int_{c/p}^{\overline{r}} \left(pr - c(1+\lambda)(p-e)r\right) h(r,\theta)dr\gamma d\theta \\
& - (1+\lambda)(p-e)y(p) \\
= & \int_B \varpi(u,\dot{u},\theta) \\
& - \lambda \left(t(b) - (pu(b)-c)s(b)\right)\Gamma(b) + \int_{\Theta/B} \int_{c/p}^{\overline{r}} \left(pr - c(1+\lambda)(p-e)r\right) h(r,\theta)dr\gamma d\theta \\
& - (1+\lambda)(p-e)y(p)
\end{aligned}$$

A partir de la relation d'Euler, on peut déterminer le rendement seuil des agents contractants :

$$\frac{\partial \varpi}{\partial u} = \frac{d}{d\theta}\frac{\partial \varpi}{\partial \dot{u}}$$

$$\Rightarrow u = \frac{c}{e} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{\Gamma(\theta)}{\gamma(\theta)}\frac{\partial H(u,\theta)/\partial\theta}{h(u,\theta)}$$

Compte tenu de l'hypothèse de dominance stochastique, le rendement seuil en situation d'information asymétrique est inférieur au rendement seuil obtenu en information parfaite (c/e). En diminuant les rendements seuils, le régulateur abaisse les coûts de transfert ($(1+\lambda)t(\theta)$). Il se calcule par une équation implicite assez complexe. On remarquera que ce rendement seuil se rapproche d'autant plus du rendement c/e que le coût d'opportunité des fonds publics se rapproche de 1 (i.e. λ proche de 0).

Calcul du pivot b ...

le contrat complet ...

A compléter ...

Un exemple numérique :
$H(r,\theta) = 1 - e^{-r/\theta}$ (distribution exponentielle)
$F(\theta) = \theta/\overline{\theta}$ (distribution uniforme)
$\Theta = [0, \overline{\theta}]$
e =0.5 kF/t ;
p différentes valeurs variant de 0.5 à 1.4 kF/t ;
$\lambda = 0.1$;
$c = 3.5$ kF/ha ; $\overline{\theta} = 10.0$ t/ha ;
Dans les simulations, on ne prend pas en considération l'ajustement du contrat sur le pivot ($B = \Theta$).

Le mécanisme optimal est ici en réalité un contrat non linéaire. La figure 28 les donne pour différents niveaux de prix garanti p.

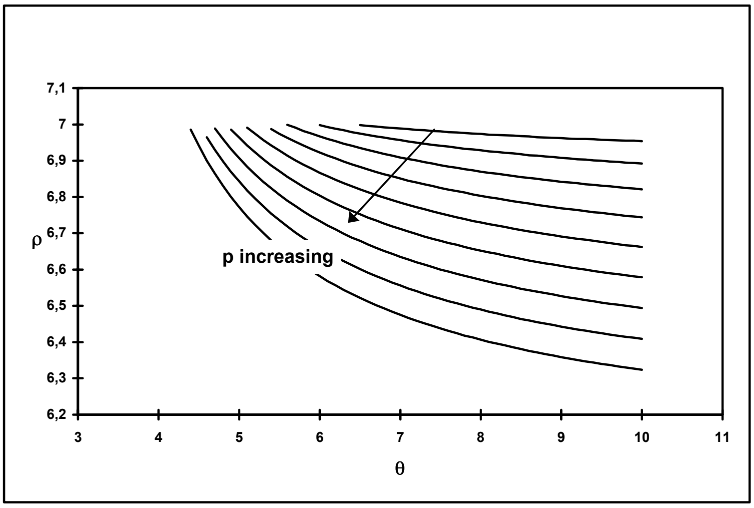


FIG. 25 – Rendements seuil pour un jeu de prix p (t/ha).

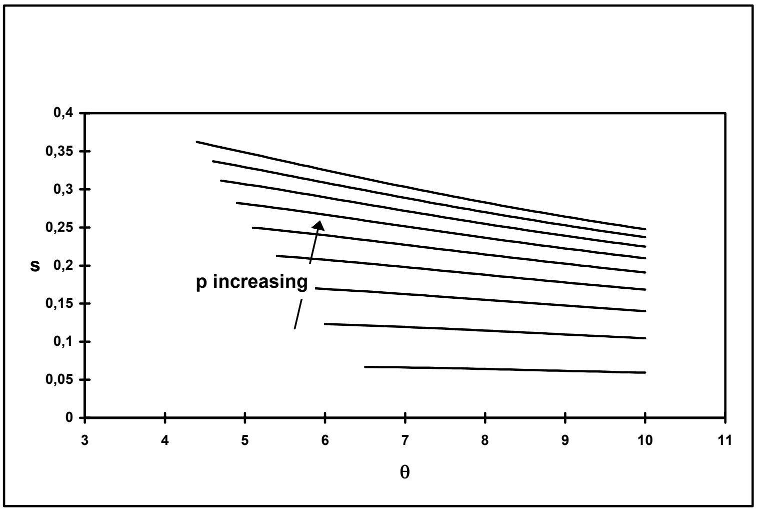


FIG. 26 – Part de terres gelées pour un jeu de prix p (%).

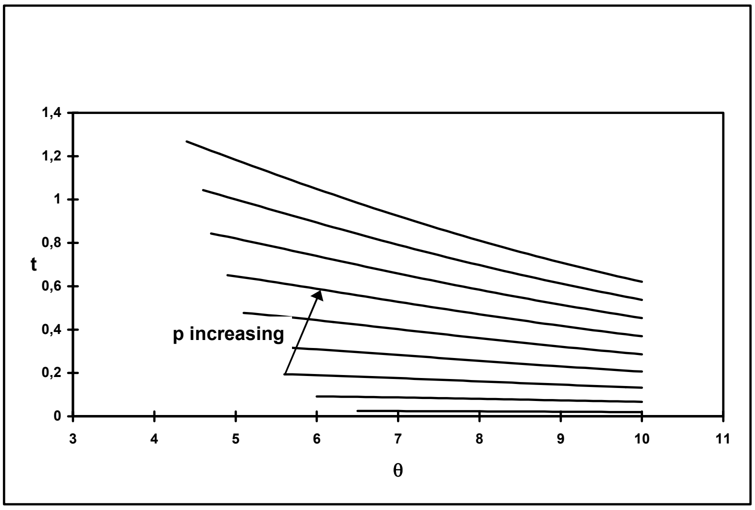


FIG. 27 – Primes associées aux contrats de gel de terres pour un jeu de prix p (kFF/ha).

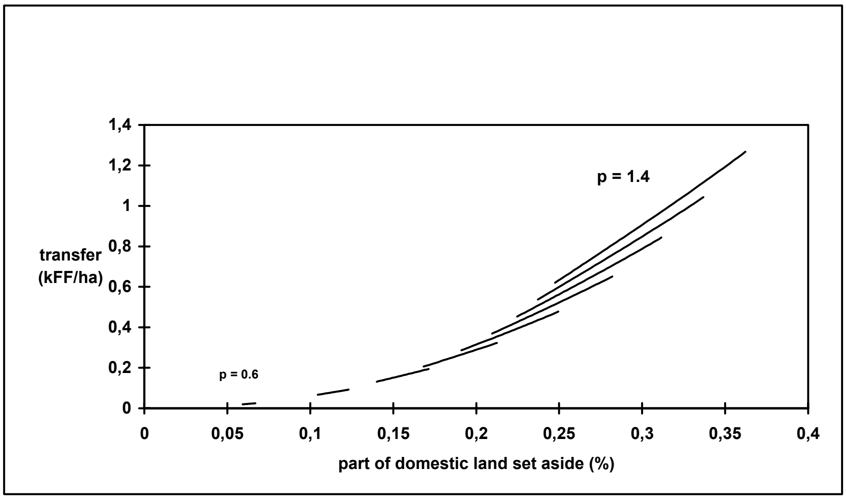


FIG. 28 – Barème des contrats associé à une distribution exponentielle des rendements au sein des fermes pour différents prix p.

7.5 Pollution diffuse

On s'intéresse à un ensemble de producteurs agricoles qui, par leur activité, ont un effet externe négatif sur l'environnement. On imputera cet effet négatif à la consommation d'un facteur de production polluant (la consommation d'engrais azotés par exemple). Cet effet est supposé dépendre du producteur au sens où l'effet externe ne dépend pas seulement du niveau de consommation individuelle du facteur polluant, mais dépend également du producteur (cela peut être lié à la conduite des culture, à la nature du sol). Production et pollution individuelles dépendront donc d'une caractéristique θ du producteur. On supposera que ce dernier "connait" sa propre caractéristique de façon privée, information qui n'est donc pas partagée avec une autorité publique de régulation.

Dès qu'il y a information privée, l'autorité publique à qui fait défaut cette information doit mettre en oeuvre des mécanismes qui permettent de restituer une certaine efficacité sociale dans les décisions privées. Nous restons dans un cadre d'information asymétrique de type sélection adverse.

Dans le modèle utilisé ici, les entreprises n'utilisent qu'un seul facteur de production qui est le facteur polluant (q) Le rapport du prix du facteur sur le prix du produit est noté w. Nous considérons un continuum d'entreprises de masse 1 dont la fonction de production est notée $f(q,\theta)$ et l'effet sur l'environnement $x(q,\theta)$. La fonction de profit est alors $\pi(q,\theta) = f(q,\theta) - wq$. On retient les hypothèses habituelles sur la fonction de production (rendements d'échelle décroissants) : $f_q^{'} > 0$ et $f_{qq}^{''} < 0$. De même, on retient la croissance et la concavité de la fonction de pollution par rapport à la consommation de facteur polluant : $x_q^{'} > 0$ and $x_{qq}^{''} > 0$. On notera $q^*(\theta)$ la consommation factorielle optimale en l'absence de régulation, qui est solution en q de l'équation :

$$f_q^{'}(q,\theta) = w$$

L'autorité de régulation est supposée connaitre la distribution des caractéristiques individuelles par la densité de probabilité $\gamma(\theta)$ supposée positive sur l'intervalle $\Theta = [0,1]$ et la fonction de répartition $\Gamma(\theta)$. L'éventuelle utilisation des fonds publics est affecté d'un surcoût λ ($\lambda \geq 0$) de sorte qu'une unité monétaire dépensée via le budget public pour la régulation coûte $1 + \lambda$ unités monétaires.

7.5.1 Contrat taxe - transfert

Le principe de taxation est appliqué en considérant que le régulateur souhaite inciter chacune des entreprises à faire un choix socialement optimal compte tenu de l'asymétrie d'information. Un mécanisme direct est proposé à cet effet, mécanisme par lequel le régulateur demande à l'entreprise d'annoncer sa caractéristique. Il associe à l'annonce $\widetilde{\theta}$ de l'entreprise θ une taxe $\sigma(\widetilde{\theta})$ et un transfert $\tau(\widetilde{\theta})$. Connaissant le barème (σ,τ), l'entreprise θ détermine sa consommation d'engrais $q(\theta)$ et son annonce optimale $\widetilde{\theta}$ comme solution du programme :

$$\max_{q,\widetilde{\theta}} \pi^r(q,\widetilde{\theta},\theta) = \pi(q,\theta) - \sigma(\widetilde{\theta})q + \tau(\widetilde{\theta})$$

On note $\tilde{q}(\theta, \sigma)$ la solution en q de l'équation (IC1b). Les conditions du premier et du second ordre seront les conditions d'incitation qui font que l'entreprise n'aura d'autre choix que d'annoncer "qui" elle est :

$$f_q^{'}(q, \theta) = w + \sigma \tag{IC1b}$$

$$\dot{\sigma}\tilde{q}(\theta, \sigma) - \dot{\tau} = 0 \tag{IC1}$$

$$\dot{\sigma} f_{q\theta}^{''} < 0 \tag{IC2}$$

La condition (IC2) est obtenue par la condition du second ordre (condition suffisante de la concavité de $\pi(q, \theta) - \sigma(\widetilde{\theta})q + \tau(\widetilde{\theta})$ en q et $\widetilde{\theta}$) et par la différentiation de l'équation (IC1) dans laquelle on impose que l'annonce soit égale à la vraie valeur. Rappelons que la condition suffisante de concavité est la définie-négativité de la matrice des dérivées secondes :

$$\begin{bmatrix} \partial^2\pi^r/\partial q^2 & \partial^2\pi^r/\partial q\partial\widetilde{\theta} \\ \partial^2\pi^r/\partial\widetilde{\theta}\partial q & \partial^2\pi^r/\partial\widetilde{\theta}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{qq}^{''} & -\dot{\sigma} \\ -\dot{\sigma} & -\ddot{\sigma}q + \ddot{\tau} \end{bmatrix} \ll 0$$

$$\Rightarrow\ (\ddot{\tau} - \ddot{\sigma}q)f_{qq}^{''} - \dot{\sigma}^2 > 0 \text{ (puisque } f_{qq}^{''} < 0)$$

Le programme du régulateur consiste à maximiser le critère public W (défini plus loin) compatible avec les conditions d'incitation et compatible avec une condition de participation qui garantit qu'une entreprise dont le régulateur souhaite qu'elle contracte ne perde rien à contracter :

$$R(\theta) = \pi^r(\tilde{q}, \theta, \theta) - \pi(q^*, \theta) \geq 0 \tag{IR}$$

En d'autres termes, la rente d'information d'un contractant ne peut pas être négative.

On vérifie que la rente est monotone si $f_{q\theta}^{''}$ est toujours de même signe. Apparaît alors une nouvelle hypothèse technique qui porte sur la sensibilité de la productivité marginale $f_q^{'}$ par rapport à la caractéristique θ.

La critère public intègre les profits des firmes, l'effet sur l'environnement, et l'impact budgétaire :

$$W = \int_0^1 \left[\pi^r(\tilde{q}(\theta, \sigma(\theta)), \theta, \theta) - x(\tilde{q}(\theta, \sigma(\theta)), \theta) - (1+\lambda)(\tau(\theta) - \sigma(\theta)\tilde{q}(\theta, \sigma(\theta))\right] \gamma(\theta) d\theta$$

et le programme du régulateur est donc :

$$\max_{\sigma(\cdot), \tau(\cdot)} W$$

$$sc \quad : \quad \begin{cases} IC1 \\ IC2 \\ IR \end{cases}$$

On élude provisoirement la condition (IC2), qu'il conviendra de vérifier ex post au prix d'éventuelles conditions techniques supplémentaires. On ramène ce programme à un programme simple de contrôle optimal en intégrant par partie le terme $\int_0^1 \tau(\theta)\gamma(\theta)d\theta$ en utilisant la condition (IC1) :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tau(\theta)\gamma(\theta)d\theta &= [\tau(\theta)\Gamma(\theta)]_0^1 - \int_0^1 \dot{\tau}(\theta)\Gamma(\theta)d\theta \\ &= \tau(1) - \int_0^1 \dot{\sigma}\tilde{q}(\theta,\sigma)\Gamma(\theta)d\theta \qquad (3)\end{aligned}$$

On se place dans le cas $f''_{q\theta} > 0$, ce qui implique que la rente est décroissante. Remarquons que cette hypothèse signifie que la productivité marginale augmente lorsque la caractéristique θ est d'un niveau plus élevé.

On substitue le terme (3) ainsi intégré dans l'expression du bien-être. Tout d'abord, puisque W fait apparaître le terme $-\lambda\tau(1)$ qui est positif[7], on peut retenir pour ce terme la valeur la plus petite compatible avec une rente positive ou nulle, et donc une valeur telle que $R(1) = 0$.

La condition nécessaire d'optimalité est obtenue par l'équation d'Euler $\frac{\partial \varpi}{\partial \sigma} = \frac{d}{d\theta}\frac{\partial \varpi}{\partial \dot{\sigma}}$ appliquée au programme :

$$\max_{\tilde{q}(\cdot)} \int_0^1 \varpi(\sigma(\theta), \dot{\sigma}(\theta), \theta)d\theta$$

$$\text{avec } \varpi(\sigma,\dot{\sigma},\theta) = [\pi(\tilde{q}(\theta,\sigma),\theta) + \lambda\sigma\tilde{q}(\theta,\sigma) - x(\tilde{q}(\theta,\sigma),\theta)]\,\gamma(\theta) + \lambda\dot{\sigma}\tilde{q}(\theta,\sigma)\Gamma(\theta)$$

On en déduit une équation implicite sur le niveau de consommation factorielle (et donc sur le niveau de la taxe puisque $f'_q(\tilde{q},\theta) - w = \sigma$) :

$$\tilde{\sigma} = \frac{x'_q}{1+\lambda} - \frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{\Gamma}{\gamma}f''_{q\theta} \qquad (4)$$

On utilise pour aboutir à cette équation la relation $f'_q(\tilde{q}(\theta,\sigma),\theta) - w = \sigma$ dérivée en θ et en σ ($f''_{qq}\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \sigma} = 1$ et $f''_{qq}\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \theta} + f''_{q\theta} = 0$).

Laissons de côté un instant l'asymétrie d'information pour aborder le cadre de l'information parfaite. Si le régulateur est parfaitement informé sur ce que sont les individus, il est en théorie capable de leur fixer le niveau de taxe restituant l'efficacité de premier rang. La consommation factorielle de la firme θ est toujours déterminée par l'équation (IC1b).

Le programme du régulateur, qui n'a plus besoin de transfert incitatif, est alors :

$$\max_{\sigma(\cdot)} \int_0^1 [\pi(\tilde{q}(\theta,\sigma),\theta) - x(\tilde{q}(\theta,\sigma),\theta) + \lambda\sigma(\theta)\tilde{q}(\theta,\sigma)]\,\gamma(\theta)d\theta$$

[7] En effet, par définition de la rente $R(\theta) = \pi(\tilde{q},\theta) - \pi(q^*,\theta) + \tau(\theta) - \sigma(\theta)\tilde{q}(\theta,\sigma(\theta)) \geq 0$ or comme on l'a vu $\tilde{q} < q^*$, ce qui implique $\pi(\tilde{q},\theta) < \pi(q^*,\theta)$ et donc $\tau(\theta) - \sigma(\theta)\tilde{q}(\theta,\sigma(\theta)) > 0$.

La taxation de premier rang en information parfaite est alors telle que

$$\sigma^\circ = \frac{x_q^{'}}{1+\lambda} - \frac{\lambda}{1+\lambda} f_{qq}^{''} q^\circ$$

La démonstration est immédiate avec une équation d'Euler ici très simple et en tenant compte des relations $\pi_q^{'}(\tilde{q}(\theta,\sigma) = \sigma$ et $\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \sigma} = \frac{1}{f_{qq}^{''}}$.

On constate alors que le contrat en information asymétrique se traduit par un niveau de taxation équivalent à la taxation de premier rang dans le cas $\lambda = 0$. Mais évidemment les producteurs continuent à bénéficier d'une rente d'information par le jeu du transfert qui reste en général strictement positif. Dans le cas plus général $\lambda > 0$, compte tenu des hypothèses techniques ($f_{qq}^{''} < 0$, $x_{qq}^{''} > 0$ et $f_{q\theta}^{''} > 0$), on observe la hiréarchie suivante qu'impliquent les relations précédentes :

$$\tilde{q}(\theta, \tilde{\sigma}(\theta)) > \tilde{q}(\theta, \sigma^\circ(\theta))$$
$$\tilde{\sigma}(\theta) < \frac{x_q^{'}(\tilde{q}(\theta,\tilde{\sigma}),\theta)}{1+\lambda} < \frac{x_q^{'}(\tilde{q}(\theta,\sigma^\circ),\theta)}{1+\lambda} < \sigma^\circ(\theta)$$

Lorsque la productivité marginale est croissante avec la caractéristique des firmes, en information imparfaite, les entreprises subissent des taxes moins élevées (et bénéficient de transferts) et augmentent leurs consommations factorielles par rapport à ce qu'il adviendrait en information parfaite.

On peut améliorer le contrat en ne le proposant qu'à un sous-ensemble $B \subset \Theta = [0,1]$. Traitons le cas $f_{q\theta}^{''} > 0$, qui implique que la rente est décroissante. Alors nécessairement B est un intervalle de la forme $B = [0, b]$. En effet, supposons que le contrat soit proposé à un agent θ et que la rente soit strictement positive. La taxe σ est positive, ce qui implique que la consommation factorielle $\tilde{q}$ est inférieure à ce qu'elle serait en l'absence de contrat ($\tilde{q}(\theta,\sigma(\theta)) < q^*(\theta)$), et le transfert $\tau(\theta)$ est nécessairement strictement positif. Il existe alors un voisinage de θ dans lequel tous les agents θ' tels que $\theta' < \theta$ et à qui on ne proposerait pas le contrat aurait intérêt à se faire passer pour l'agent θ.

Le critère public s'écrit :

$$\begin{aligned} W &= \int_0^b \left[\pi(\tilde{q}(\theta,\sigma(\theta)),\theta) - x(\tilde{q}(\theta,\sigma(\theta)),\theta) - \lambda(\tau(\theta) - \sigma(\theta)\tilde{q}(\theta,\sigma(\theta))\right]\gamma(\theta)d\theta \\ &\quad + \int_b^1 \left[\pi(q^*(\theta),\theta) - x(q^*(\theta),\theta)\right]\gamma(\theta)d\theta \end{aligned}$$

L'agent $\theta = b$ devient l'agent pivot indifférent à l'acceptation du contrat et qui bénéficierait d'une rente nulle s'il l'acceptait ($R(b) = 0$). La relation (4) est toujours valable et caractérise le niveau de la taxe pour les θ contractants. La détermination de l'agent pivot b est obtenue par le calcul de la dérivée $\frac{\partial W}{\partial b}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial b} &= \left[R(b) - (1+\lambda)(\tau(b) - \sigma(b)\tilde{q}(b,\sigma(b)) - x(\tilde{q}(b,\sigma(b)),b) + x(q^*(b),b)\right]\gamma(b) \\ &= -\left[(1+\lambda)(\tau(b) - \sigma(b)\tilde{q}(b,\sigma(b)) + x(\tilde{q}(b,\sigma(b)),b) - x(q^*(b),b)\right]\gamma(b) \end{aligned}$$

7.5.2 Contrat quota - transfert

Voir notes du 16/02/05, problème plus simple à traiter que le contrat taxe - transfert ...

Equivalence avec le contrat ”taxe”.

7.5.3 Marché de quota

7.6 Tragédie des communs

7.7 Retour au coût d’opportunité des fonds publics

Le paramètre λ des sections précédentes est déterminant pour l’intérêt des politiques contractuelles. Dans ce qui précède, nous avons vu que lorsque ce paramètre se rapproche de zéro, en général la valeur contractuelle de l’instrument d’intervention (i.e. la taxe) se rapproche de son niveau de premier rang.

Il convient cependant de rappeler que même dans ce cas, l’asymétrie d’information se traduit par des transferts et des rentes informationnelles.

Il apparaît qu’en situation d’asymétrie d’information, les contrastes entre les contractants sont d’autant plus marqués que la valeur du paramètre est forte.

La valeur de ce paramètre est par exemple discutée par J.J. Laffont et J. Tirole. Il est suggéré des valeurs pouvant atteindre 0.4, voire 1.

Ce paramètre est également déterminant quand on veut comparer les avantages respectifs des politiques contractuelles et des politiques contraignantes fondées sur des engagements “uniformes” pour tous les agents (voir par exemple l’article de Bourgeon et al., sur les politiques de gel de terre, EER95, voir aussi Jayet, 2000 Annales d’économie et statistique).

Voir aussi travail en cours avec A.S. Crépin, remise en cause du résultat de Maskin et Riley ? ? ?

7.8 Segmentation "horizontales" des agents

Papier à paraître dans Ecological Economics, 2009 (J. Canton, S. De Cara, P.A. Jayet).

7.9 Contrats dynamiques

Exemple de la régulation d'une pollution diffuse dans un cadre dynamique (accumulation du fait de l'activité polluante contrebalancée par la résorption naturelle).

Problème de contrôle optimal. Introduction d'un "effet retard" sous la forme d'un décalage temporel entre l'émission de pollution et l'impact. Impact sur l'état stationnaire des paramètres : taux d'actualisation, paramètre de retard, taux de résorption naturelle.

Asymétrie d'information et régulation par le contrat : contrats proposés en début de période ; conditions incitatives intégrales ; impacts sur l'état stationnaire.

8 Défaillance du marché : concurrence imparfaite

8.1 Préliminaire

L'exemple archétype que constitue le "dilemme du prisonnier".

Deux firmes dont les gains dépendent de leur niveau d'activité et du niveau de pollution globale.

		firme 2	
	U_1 / U_2	**effort**	**pas d'effort**
firme 1	**effort**	3 / 3	0 / 4
	pas d'effort	4 / 0	1 / 1

FIG. 29 – Exemple de jeu du type "dilemme du prisonnier".

Théorie des jeux non coopératifs. Quelques notions. Voir en annexe.

Beaucoup de problèmes d'économie industrielle portent sur la qualité des produits et les stratégies en qualité (et éventuellement en quantité et/ou prix) des agents. Historiquement, c'est un problème de choix des quantités qui émerge, avec le duopole de Cournot et les stratégies en quantité des deux firmes présentes sur le marché.

Duopole de Bertrand (stratégies en prix).

Problème de qualité et stratégie en matière d'information. Market lemons (Akerlof).

8.2 Duopole de Cournot

Exemple de 2 entreprises "identiques" (même coût $\frac{x}{2}$, si x désigne la quantité produite, même conception du jeu), en situation ologopolistique. Elles connaissent la demande y pour tout prix p ($y = 1 - p$).

Les 2 entreprises ont le même programme :

$$\max_{x_i} (1 - \sum_{i=1}^{2} x_j)x_i - \frac{x_i}{2}$$

Fonction de meilleure réaction.

$$MR_i(x_{-i}) = \frac{1}{4} - \frac{x_{-i}}{2}$$

Equilibre de Nash.

Si l'une est considérée comme "leader" sur le marché, l'issue du jeu est un équilibre de Stackelberg.

Situation de "référence" : $p^* = \frac{1}{2}$ (et $x^* = 0$), $\pi_i^* = 0$, $CS^* = 0$ (référence), et donc $W^* = 0$.

Comparer les niveaux de welfare associés aux issues correspondant aux différentes situations prévalant pour le marché.

8.3 Différenciation verticale

Tous les consommateurs hiérarchisent les biens de la même façon, en terme de préférence.

Modèle de Mussa et Rosen.

Un bien de même nature, mais de qualité variable. On différenciera "les" biens par la qualité.

Les consommateurs sont caractérisés par un paramètre de goût pour la qualité, noté θ. La qualité du bien est repérée par un indice q_i, et le prix associé au bien de cette qualité est noté p_i. L'utilité que le consommateur θ retire de la consommation du bien de qualité q_i est alors :

$$U(\theta, q_i) = \theta q_i - p_i$$

On supposera que seules deux niveaux de qualité existent sur le marché pour ce bien. On supposera la hiérarchie suivante : $q_2 > q_1$. Le consommateur a le choix entre consommer la qualité haute q_2, consommer la qualité basse q_1, ou ne pas consommer. Tout consommateur est supposé ne consommer qu'une unité au plus du bien, quelle qu'en soit la qualité), de sorte que le programme du consommateur est le suivant :

$$\max \{0, \theta q_1 - p_1, \theta q_2 - p_2\}$$

A partir de ce modèle générique, on peut décliner plusieurs problèmes, à 1 ou 2 firmes, avec un timing du jeu en 1 ou 2 étapes, et des stratégies portant sur les quantités, les qualités ou les prix. Prenons l'exemple de deux firmes, l'une produisant la qualité basse et l'autre la qualité haute, les niveaux de qualité étant prédéterminés, et qui choisissent simultanément les quantités mises sur le marché tout en "connaissant" la demande. Quelles quantités vont-elles produire respectivement ?

Données supplémentaires : le paramètre de goût θ est distribué selon la densité de probabilité $f(\theta)$ sur le support $[0, 1]$ (on prendra en général en considération une distribution uniforme sur le support, i.e. $f(\theta) = 1$). La taille du marché (i.e. le "nombre" de consommateurs) est noté M.

Consommateurs "pivots" et hiérarchie des rapports "prix - qualité".
Demandes de qualité.

Condition pour les deux niveaux de qualité soient présents sur le marché.

Autres problèmes :

Monopole et choix des quantités pour les deux niveaux de qualité.

Duopole et choix séquentiels des qualités (simultanément dans un premier temps), puis des quantités (simultanément dans un deuxième temps).

...

8.4 Différenciation horizontale

Les consommateurs ne hiérarchisent pas de la même façon la consommation d'un bien lorsque la qualité de ce bien change. Ils distingueront par exemple les automobiles d'un type donné par leur couleur. Ils distingueront les produits de grande consommation par la distance qu'il leur faut parcourir pour les acquérir.

Les marchands de glace de Hotelling.
Une plage, deux marchands ambulants se présentent. Ils vont devoir choisir dans un premier temps leur emplacement, puis dans un deuxième temps le prix de vente des glaces qu'ils ont en stock. Les consommateurs sont répartis uniformément sur la plage représentée par un segment $[0, 1]$. La localisation d'un marchand sera notée x ($x \in [0, 1]$), le prix de vente de ses glaces sera noté p. Le consommateur différencie les glaces par la seule distance qu'ils ont à parcourir pour les acheter, plus précisément la désutilité liée à la distance est une fonction strictement convexe de cette distance (on retiendra le carré de la distance).

Le joyeux baigneur situé en θ sur la plage est considéré comme désireux d'acquérir une et une seule glace auprès de l'un des deux marchands respectivement situés en x_1 et x_2 (avec par convention $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$). Son choix résulte du programme suivant :

$$\min\{p_1 + \frac{(\theta - x_1)^2}{2}, p_2 + \frac{(\theta - x_2)^2}{2}\}$$

Consommateur pivot.
Demandes qui s'adressent à chacun des marchands de glace, notées D_i.

Un raisonnement de type "backward induction" permet d"e résoudre le problème des choix qui se posent aux marchands. Puisque le déroulement du jeu fait qu'ils choisissent leur emplacement avant de fixer leur prix, traitons en premier lieu le problème des prix en considérant comme fixés les emplacements. Pour les prix, puis pour les emplacements, les choix des deux marchands se font simultanément en information complète (chacun peut constater l'emplacement puis le prix de l'autre). Le prix auquel le marchand i vendra ses glaces est tel que le profit retiré de la vente soit maximal :

$$i : \max_{p_i} p_i D_i(p_1, p_2)$$

Fonctions de meilleure réponse en prix :

Problème en localisation :

Résultat : différenciation maximale en localisation, chacun se place à l'une des deux extrémités de la plage. Ils vendent leurs glaces aux mêmes prix, en donnant satisfaction chacun à la moitié de la clientèle.

8.5 Stratégies publiques et professionnelles en matière de qualité

Un exemple : la qualité des vins (*De l'utilité sociale du controle public de la qualité minimale des vins*, Jayet, Fuentes-Castro, Cahier d'Economie et Sociologie Rurales, 2001).
Application à un problème de garantie publique sur la qualité (application à un problème de contrôle public de la qualité des vins, Jayet et Fuentes-Castro, Cahiers d'Economie et Sociologie Rurales, 2001).

En résumé :
Une classification hiérarchique des vins est fréquemment observée dans de nombreuses zones d'appellation viticole. La question du choix de la qualité et de l'intérêt de la protéger par la puissance publique est alors posée. Le papier aborde les stratégies en qualité adoptées par deux organisations professionnelles soumises ou non à un contrôle public et qui sélectionnent le niveau de qualité des producteurs qui leur sont affiliés. Dans le modèle proposé, les prix, quantités et qualités sont déterminés de façon endogène. Si les deux organisations choisissent simultanément leur qualité dans une optique de profit, le

jeu conduit à l'absence de différenciation. Il y a différenciation lorsque le niveau de qualité haute est déterminé par une instance publique. Mais le niveau optimal social de différenciation est obtenu si l'autorité publique s'engage sur la qualité basse. Dans le cas des produits viticoles, ce dernier résultat renforcerait la conception d'un Institut des Appellations préférentiellement tourné vers la défense des produits de qualité la moins élevée. Il suggère que la garantie publique prenne la forme d'un niveau minimal de qualité s'imposant à tous les producteurs de la zone considérée, les producteurs engagés sur la qualité haute choisissant alors d'eux-mêmes le niveau de différenciation socialement optimal.

Le modèle :

Un continuum de producteurs caractérisés par leur aptitude à produire du vin, aptitude représentée par le paramètre θ.

Un continuum de consommateurs caractérisés par leur goût pour la qualité du vin consommé, goût représenté par le paramètre γ.

Chaque producteur s'associe à un syndicat parmi deux (l'un qualifié de représentant de la "qualité haute", l'autre qualifié de représentant de la "qualité basse").

Seules hypothèses techniques :

- Distribution homogène des paramètres θ et γ sur $[0,1]$
- Utilité à la Mussa-Rosen : le surplus qu'un consommateur γ tire de la consommation d'une unité de bien de qualité q_i, et notée $U_{\gamma i}$, est telle que :

$$U_{\gamma i} = \bar{u}\gamma q_i - p_i \tag{5}$$

- Profit d'un producteur : le profit $\Pi_{\theta i}$ obtenu par le producteur θ de la production de la qualité q_i est un profit classique en économie agricole, égal à la différence entre recette et coût par unité de surface :

$$\Pi_{\theta i} = p_i \frac{r}{q_i} - c\theta q_i - C_0 \tag{6}$$

Le jeu :

- Etape 1 : chacune des deux organisations professionnelles regroupant les producteurs en activité définit le niveau minimal de la qualité des produits de ses adhérents (i.e. qualités q_1 et q_2).
- Etape 2 : chaque producteur adhère à l'une ou l'autre de ces organisations professionnelles, s'engageant ainsi à respecter le niveau de qualité choisi.
- Etape 3 : l'ensemble des consommateurs et des producteurs concourrent simultanément à la fixation des prix et des quantités dans des échanges en concurrence parfaite, les niveaux de qualité et ceux qui les adoptent étant déterminés aux deux étapes précédentes du jeu.

Le problème :

– On analyse les différentes possibilités existant en terme de différenciation (les deux “syndicats” peuvent n’en former qu’un, et s’ils n’en forment qu’un, ils peuvent encore décider de proposer aux consommateurs un seul ou deux niveaux de qualité des produits).
– Une autorité publique se charge, éventuellement, de réguler la qualité haute, la qualité basse, les deux qualités, ou décide de ne pas intervenir.

Résultats :
– Caractérisation des issues du jeu dans les différentes variantes du problème (figure 30)
– Impacts à l’échelle individuelle, quand on passe d’une situation de “monopole privé en qualité” à l’optimum social, dont on démontre qu’il est obtenu par un régulateur qui n’imposerait un standard de qualité que sur la seule qualité basse (figure 31)

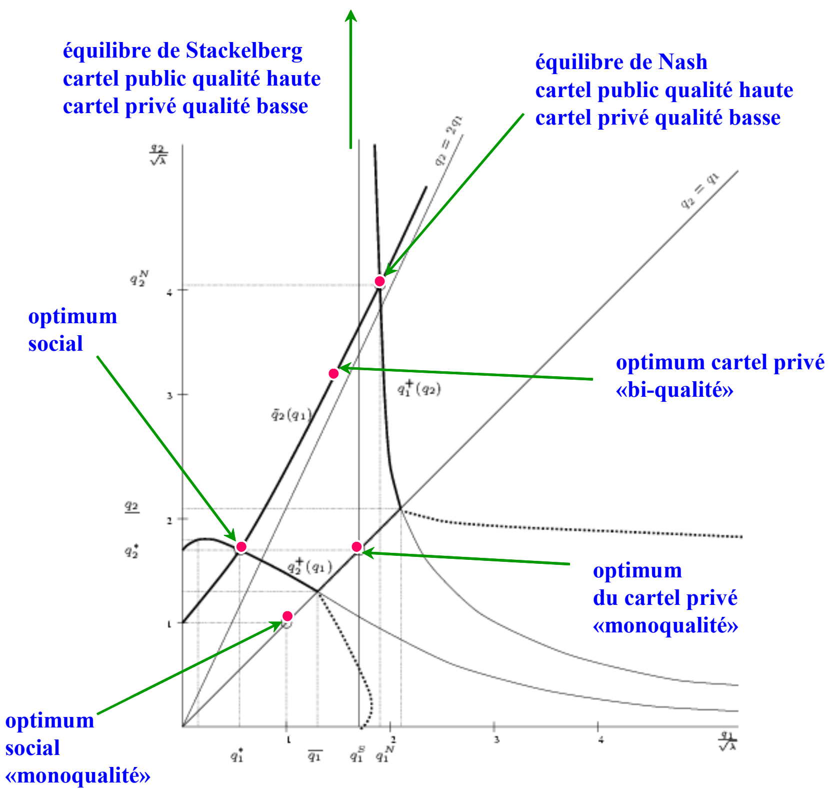


FIG. 30 – Illustration de jeux stratégiques en matière de choix de la qualité des vins et de l’affiliation à des syndicats de producteurs “basse” ou “haute” qualité.

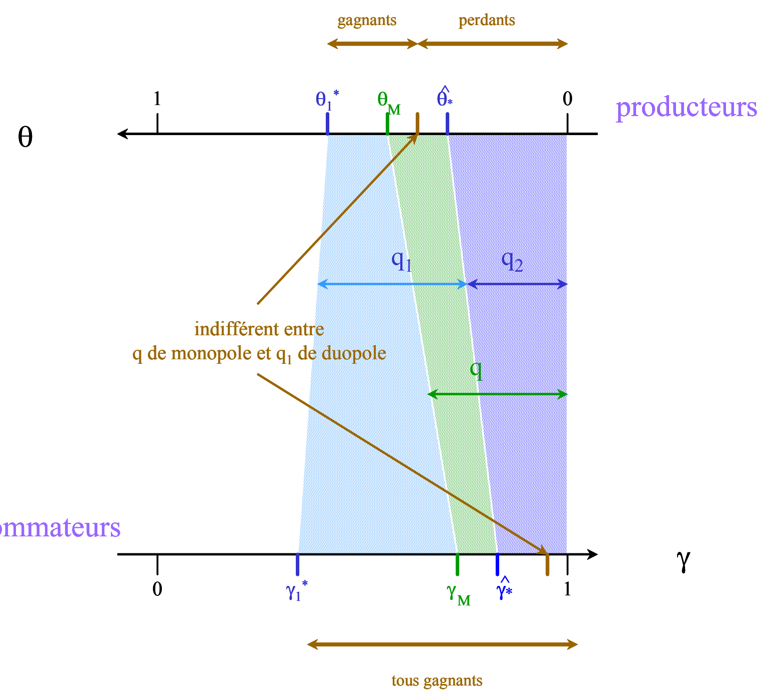


FIG. 31 – Impacts à l'échelle individuelle.

Interprétation : l'auto-organisation des producteurs de “qualité haute” capables de définir et de faire respecter eux-mêmes un cahier des charges adapté devrait s'accompagner d'un engagement public sur la définition et le contrôle d'un standard de “qualité basse”.

9 Commerce international stratégique

Modèle à la Brender et Spencer généralisé. Un ensemble de N Etats (par la suite identiques) susceptibles de s'entendre sur des politiques coordonnées de taxe ou subvention à l'exportation sur un marché tiers passif. Chapitre de thèse de Joël Mathurin (1997). Coeur d'un jeu à structure de coalitions. Figure 32.

Une petite coalition d'Etats peut dévier de façon crédible de la grande coalition, et on montre que sa "taille" ne peut excéder 3.

On démontre que le coeur du jeu est non vide quand le nombre total N d'Etats pris en compte ne dépasse pas 4. Dans le cas contraire, les "petites coalitions cocagneuses" sont de taille 1 quand $N \geq 5$, de taille 2 quand $N \geq 9$, et de taille 3 quand $N \geq 28$.

Le modèle de départ :

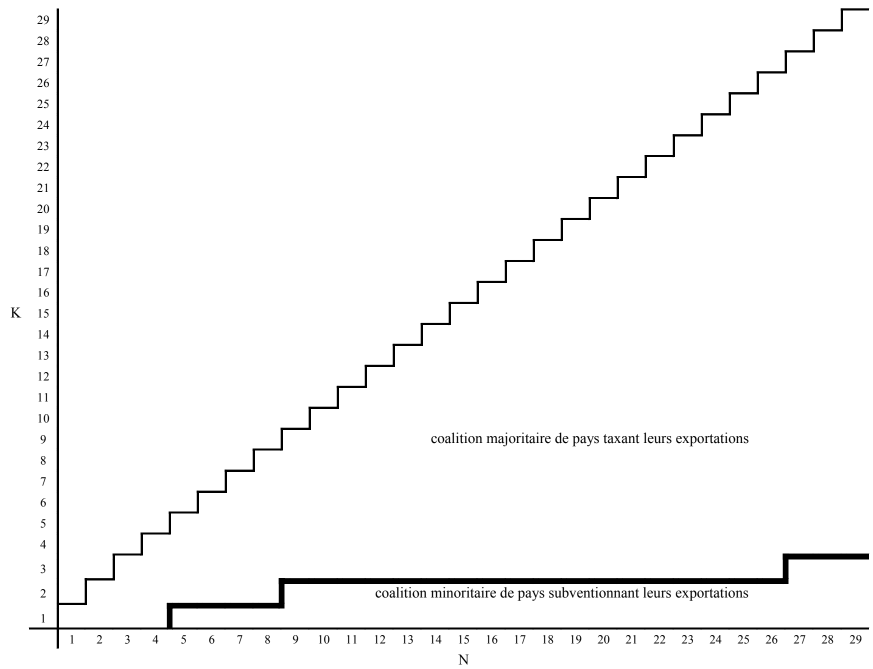
N Etats, 1 producteur associé à chaque Etat i susceptible de vendre sur un marché tiers avec un coût marginal de production constant θ_i, demande du pays tiers de la forme $P = a - \sum_{i=1}^{N} q_i$ concurrence oligopolistique à la Cournot (jeu en quantités q_i).

Remarque :
On démontre qu'il existe des cas où la guerre commerciale est profitable à tous (y compris le pays tiers !). On le démontre dans le cas de N Etats exportateurs différents quant à la caractéristique dans ce jeu stratégique (en l'occurence, il s'agit du coût de production du bien exportable). Ce résultat n'est possible que parce que on se situe dans un contexte de comportement stratégique de la part des "joueurs" (il n'y a donc pas concurrence parfaite sur le marché).

Chapitre de thèse de Stéphane De Cara (2001). Cartels et négociations internationales pour la régulation d'une pollution globale (effet de serre).

Structure stable de coalitions
dans la coordination de politiques commerciales stratégiques sur un marché tiers

Cas de N pays possédant une firme nationale à coût marginal constant et identique



En trait gras : la dimension K de la "petite coalition" en fonction de N

FIG. 32 – Structure stable d'une partition en deux coalitions d'Etats, les Etats étant initialement identiques, dans un jeu à la Brender et Spencer.

10 Coopération, jeux coopératifs et coeur

Approche de la coopération par le marchandage. Rubinstein. Solution de Nash. Valeur d'une coalition. Greenberg. Shapley. Bondavera-Shapley.

Exemple, négociation de l'OCM viti-vini (article co-écrit avec Joël Mathurin, 1997).

10.1 Partage d'un "gâteau" : marchandage à la Rubinstein.

Arbre de Kuhn, jeu sous forme extensive.

Etudions un exemple de négociation entre 2 joueurs. On suppose qu'il y a un inconvénient à faire durer la négociation, via un facteur de dépréciation du gâteau (perte de valeur à chaque étape). dans un premier temps, on considère que ce jeu se déroule avec un nombre fini d'étapes dans la négociation, où chaque joueur à tour de rôle propose un partage que l'autre peut accepter (fin du jeu), ou refuser (et dans ce cas ce dernier propose à son tour un partage ...). On note Γ le gâteau, β le facteur de dépréciation ($0 \leq \beta < 1$), et T le nombre d'étapes. On suppose que le joueur 1 fait la première proposition (étape 1 du jeu). Si aucun accord n'est trouvé, l'issue finale du jeu est un partage $(0, 0)$. Classiquement, on résout ce jeu par un raisonnement à rebours. La dernière étape donne la main au joueur 1 si T est impair, au joueur 2 si T est pair.

A l'étape T, le joueur i à qui revient la dernière proposition de partage sait que l'autre joueur acceptera des miettes plutôt que de ne rien avoir, et, la valeur du gâteau étant $\beta^{T-1}\Gamma$, le joueur i obtiendra une part $\beta^{T-1}\Gamma\varepsilon_T$ et abandonnera $\beta^{T-1}\Gamma(1-\varepsilon_T)$ à l'autre joueur, $\varepsilon_T > 0$ étant aussi proche de 1 que possible

$$\varepsilon_T \lesssim 1$$

. A l'étape $T-1$ précédente, le joueur $-i$ anticipant ce partage aura intérêt à proposer un partage qui offrirait au joueur i au moins aussi bien que $\beta^{T-1}\Gamma\varepsilon_T$. Il s'octroiera une part ε_{T-1} d'un gâteau alors évalué à $\beta^{T-2}\Gamma$, de sorte que :

$$\beta^{T-2}\Gamma(1-\varepsilon_{T-1}) > \beta^{T-1}\Gamma\varepsilon_T$$

En dernière étape, il est clair que ε_T sera proche de 1, de sorte que ε_{T-1} doit être tel que :

$$\varepsilon_{T-1} \lesssim 1-\beta$$

tout en étant aussi proche que possible de $1-\beta$. Le jouer $-i$ escompte un gain $\beta^{T-1}\Gamma(1-\beta)$, en laissant au joueur i un gain $\beta^{T-2}\Gamma\beta$. A l'étape $T-2$, le joueur i sait qu'il devra abandonner au joueur $-i$ un gain au moins égal à $\beta^{T-2}\Gamma(1-\beta)$, de sorte que la part ε_{T-2} est telle que :

$$\beta^{T-3}\Gamma(1-\varepsilon_{T-2}) > \beta^{T-2}\Gamma(1-\beta)$$
$$\text{soit : } \varepsilon_{T-2} \lesssim 1-\beta+\beta^2$$

tout en étant aussi proche que possible de la valeur $1-\beta+\beta^2$.

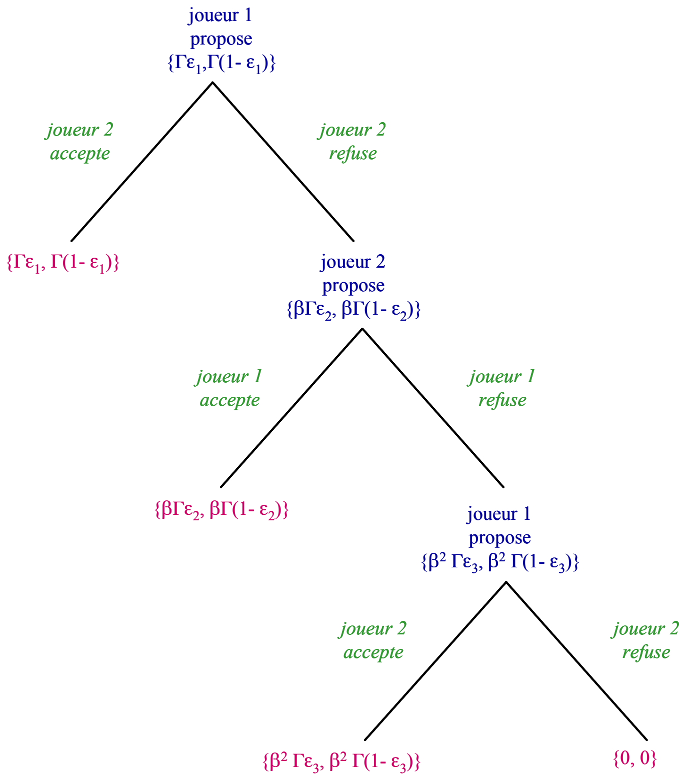


FIG. 33 – Exemple de négociation : marchandage à 3 étapes entre 2 joueurs.

Ce raisonnement, itéré jusqu'à la première étape du jeu, conduit à un partage $(\Gamma\varepsilon_1, \Gamma(1-\varepsilon_1))$ avec :

$$\varepsilon_1 = \sum_{t=0}^{T-1} (-\beta)^t = \frac{1-(-\beta)^T}{1+\beta}$$

L'issue du jeu est donc connue et obtenue dès la première étape, avec un partage égal à $(\Gamma\frac{1-(-\beta)^T}{1+\beta}, \Gamma\beta\frac{1-(-\beta)^{T-1}}{1+\beta})$, soit $(\Gamma\frac{1+\beta^T}{1+\beta}, \Gamma\beta\frac{1-\beta^{T-1}}{1+\beta})$ quand T est impair, et $(\Gamma\frac{1-\beta^T}{1+\beta}, \Gamma\beta\frac{1+\beta^{T-1}}{1+\beta})$ quand T est pair.

Dans un jeu à 2 étapes, le partage est $(\Gamma\beta, \Gamma(1-\beta))$, qui est en général défavorable au joueur 1 qui joue pourtant en premier, dans la mesure où la dépréciation est assez faible ($\frac{1}{2} \leq \beta < 1$). Par exemple, si $\beta = 0.9$, le partage s'effectue dans les proportions $(0.1, 0.9)$. Dans le cas $T = 3$, le joueur 1 reprend l'avantage avec un partage dans des proportions $(0.91, 0.09)$. Les figures 34 donnent l'issue du jeu en fonction du nombre de

périodes. Lorsque ce nombre devient très grand, le partage tend asymptotiquement vers $(\Gamma\frac{1}{1+\beta}, \Gamma\frac{\beta}{1+\beta})$, d'autant moins "équitable" et plus avantageux pour le joueur 1 que β est proche de 0, d'autant plus "équitable" que β est proche de 1.

10.2 Approche axiomatique de Nash

A côté des approches stratégiques, certains théoriciens préfèrent rechercher les issues d'un jeu compatibles avec des axiomes "de bon sens". Une issue apparaît comme telle lorsqu'elle est agréée par les 2 joueurs. En suivant la présentation de Myerson (Myerson, Game theory, chap. 8), on considère un jeu (F, d) à 2 joueurs caractérisé par l'ensemble des allocations possibles $F \subset \Re^2$, et par le point de désaccord $d = (d_1, d_2) \in F$ dont la composante i indique le niveau de gain en dessous duquel le joueur i n'acceptera pas l'accord. Une allocation est notée $x = (x_1, x_2)$ et une issue du jeu $\phi(F, d)$.

On suppose qu'une issue du jeu doit satisfaire les 5 axiomes suivants.

Axiome de Pareto : on ne peut pas améliorer simultanément les situations des 2 joueurs : $x \in F, x \geq \phi(F, d) \Rightarrow x = \phi(F, d)$

Axiome de rationalité individuelle : le marchandage ne pénalise aucun des deux joueurs : $\phi(F, d) \geq d$

Axiome d'anonymat (symétrie) : permuter les joueurs ne modifie pas l'issue du jeu : soit σ une permutation des joueurs : $\phi(\sigma(F), \sigma(d)) = \sigma(\phi(F, d))$

Axiome d'indépendance par rapport aux options non pertinentes : $G \subset F$: $\phi(F, d) \in G \Rightarrow \phi(G, d) = \phi(F, d)$

Axiome d'invariance par rapport à toute transformation affine : soit $d' = (\alpha_1 d_1 + \beta_1, \alpha_2 d_2 + \beta_2)$ et $F' = \{(\alpha_1 x_1 + \beta_1, \alpha_2 x_2 + \beta_2); x \in F\}$. Alors $\phi(F', d') = (\alpha_1 \phi_1(F, d) + \beta_1, \alpha_2 \phi_2(F, d) + \beta_2)$

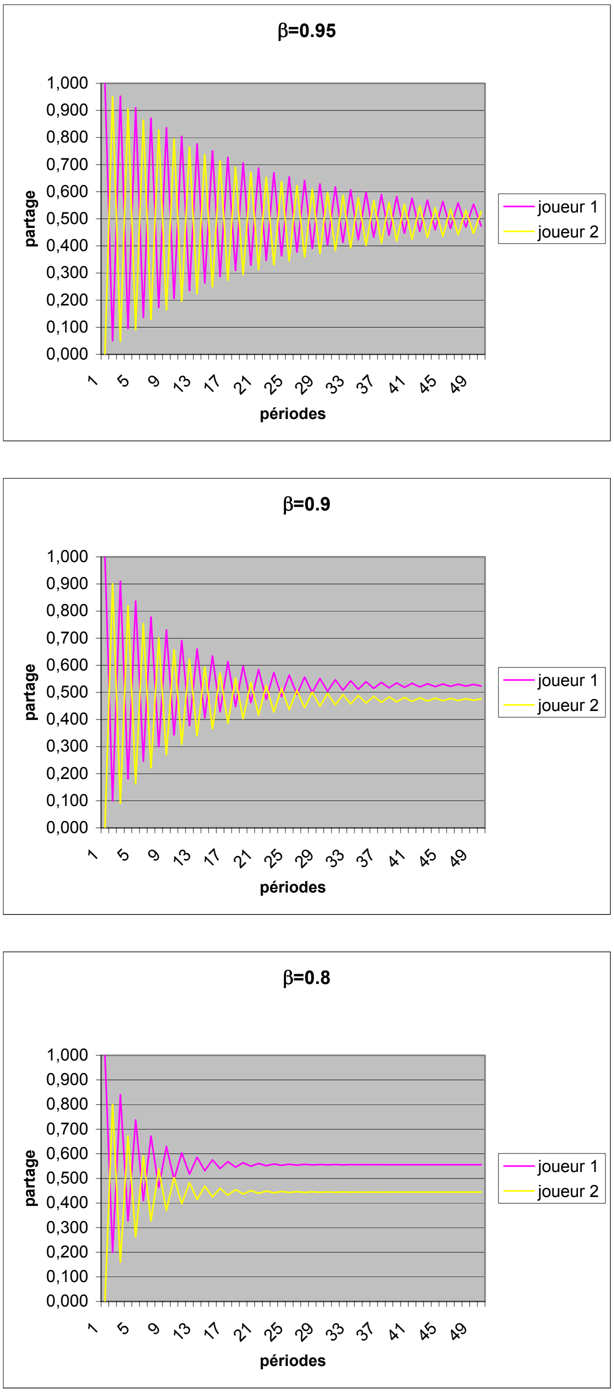


FIG. 34 – **Partage des gains pour différents taux de dépréciation .**

Théorème 10.1 *Théorème (Nash). Il existe une et une seule option (la solution de Nash) respectant les 5 axiomes, qui est* $\arg\max_{\substack{x\in F\\ x\geq d}}(x_1-d_1)(x_2-d_2)$

A partir de ce résultat, on propose une généralisation à N joueurs ayant des "pouvoirs de négociation" respectivement égaux à γ_i $(1\leq i\leq N)$ et normalisés $(\sum_{i=1}^N \gamma_i = 1)$, la symétrie étant comprise en terme de position dans le jeu (et non en terme de pouvoir de négociation). Considérons le problème de partage d'un gâteau (de taille 1), en faisant l'hypothèse qu'il y a une marge de négociation $(\sum_{i=1}^N d_i < 1)$. L'ensemble F des allocations possibles est $F=\{x \ :\forall i \ : x_i\geq 0 \ ; \sum_i x_i\leq 1\}$. Le problème transformé en "programme de Nash" devient :

$$\max_x \prod_{i=1}^N (x_i-d_i)^{\gamma_i}$$
$$\forall i \ x_i\geq d_i$$
$$\sum_{i=1}^N x_i \leq 1$$

dont la solution est : $x_i = d_i+\gamma_i(1-\sum_{i=1}^N d_i)$. Cette issue correspond à quelque chose d'assez intuitif, où la "marge globale de négociation" (le véritable gâteau) est réparti au prorata des pouvoirs de négociation.

Imaginons une négociation de type "tour de table", où le joueur J_i prélève une part α_i du gâteau restant lorsque son tour vient, et passe la main au joueur suivant. Dans la mesure où chaque joueur anticipe que son tour revienne, il ne bloque pas la négociation. Le joueur J_i dont le pouvoir de négociation est toujours noté γ_i obtiendra un gain u_i que l'on cherche à calculer. Lors du $T^{ième}$ tour de table pour le joueur i (soit l'étape $(T-1)N+i$), le gain des joueurs s'établit par récurrence à

$$g_i = \alpha_i\prod_{j=1}^{i-1}(1-\alpha_j)\sum_{t=1}^{T-1}\prod_{k=1}^{N}(1-\alpha_k)^t$$

Asymptotiquement, lorsque le nombre de tours de table devient infiniment grand, le partage tend vers la solution :

$$u_i = \frac{\alpha_i\prod_{j=1}^{i-1}(1-\alpha_j)}{1-\prod_{k=1}^{N}(1-\alpha_k)}$$

Dans ce jeu, la part finale du gâteau obtenue par le joueur i est proportionnelle à $\gamma_i = \alpha_i\prod_{j=1}^{i-1}(1-\alpha_j)$, où γ_i représente son pouvoir réel de négociation qui intègre la position relative autour de la table et le numéro d'ordre dans la prise de parole. On vérifiera aisément que $\sum_{i=1}^N\gamma_i = 1-\prod_{k=1}^N(1-\alpha_k)$.

Autres approches axiomatiques (Kalaï-Smorodinsky, Harsanyi)

"Solution égalitaire" : $x_1 - d_1 = x_2 - d_2$ (viole l'axiome d'invariance)

"Solution utilitariste" : $(max \sum_i U_i)$ $argmax_{x \in F}$ (viole l'axiome d'invariance)

10.3 Approches coalitionnelles

Dans l'approche de Nash, les joueurs n'intègrent pas l'idée qu'ils peuvent tirer avantage à se coaliser. La notion de coalition devient centrale dans ce qui suit.

Lorsqu'une coalition se forme, on considère que les membres de cette coalition deviennent solidaires dans leurs choix et dans la perception des effets des actions des autres coalitions. Une fois la coalition formée, on suppose que la question du partage des gains au sein de la coalition est une question interne.

Précisons d'emblée que nous ne nous intéresserons ici qu'aux jeux à utilité transférable.

10.3.1 Généralités et définitions

Fonction caractéristique (valeur de coalition).

La valeur d'une coalition est en quelque sorte l'équivalent de ce que peut représenter le point de désaccord pour un individu (le niveau de gain en dessous duquel l'individu bloquera toute possibilité d'accord). Au même titre que l'on s'appuie sur la rationalité individuelle (implicitement la maximisation de l'utilité), il convient de faire des hypothèses sur une "rationalité de groupe" (Greenberg, Weber, Handbook). Celle-ci peut s'appuyer sur une certaine conception des rapports à autrui, caractérisée par exemple selon la prudence d'une coalition face aux actions exercées par les autres.

On notera $\mathcal{S}$ tout sous-ensemble de joueurs appartenant à $\mathcal{N}$ constitué des N joueurs. La dimension d'une coalition sera notée S ($S = card(\mathcal{S})$). Un vecteur d'actions des joueurs sera noté a, et, si nécessaire, on notera $a_{\mathcal{S}}$ le vecteur des actions des membres de la coalition $\mathcal{S}$ (et $a_{-\mathcal{S}}$ ou $a_{\mathcal{N}/\mathcal{S}}$ les actions des autres joueurs).

On distingue par exemple la α-théorie et la β-théorie de sorte que la valeur d'une coalition est :

$$\begin{aligned} v_\alpha(\mathcal{S}) &= \max_{a_{\mathcal{S}}} \min_{a_{-\mathcal{S}}} \sum_{i \in \mathcal{S}} U_i(a) \\ v_\beta(\mathcal{S}) &= \min_{a_{-\mathcal{S}}} \max_{a_{\mathcal{S}}} \sum_{i \in \mathcal{S}} U_i(a) \end{aligned}$$

On démontre que $v_\beta(\mathcal{S}) \geq v_\alpha(\mathcal{S})$. La conception "$\alpha$" traduit de la part de chaque coalition une approche très prudente du comportement des autres. Il existe d'autres valeurs de coalition fondée sur un comportement "à la Nash" (voir l'équilibre de Nash des jeux non coopératifs), "à la Stackelberg"

$$v_s(\mathcal{S}) = \max_{a_{\mathcal{S}}} \sum_{i \in \mathcal{S}} U_i(a_{\mathcal{S}}, \arg\max_{a_{-\mathcal{S}}} \sum_{i \in \mathcal{N}/\mathcal{S}} U_i(a))$$

ou "à la Harsanyi"

$$\begin{aligned} v_h(\mathcal{S}) &= \textstyle\sum_{i\in\mathcal{S}} U_i(\bar{a}_{\mathcal{S}}, \bar{a}_{-\mathcal{S}}) \\ v_h(\mathcal{N}/\mathcal{S}) &= \textstyle\sum_{i\in\mathcal{N}/\mathcal{S}} U_i(\bar{a}_{\mathcal{S}}, \bar{a}_{-\mathcal{S}}) \\ \bar{a}_{\mathcal{S}} &\in \arg\max_{a_{\mathcal{S}}} \textstyle\sum_{i\in\mathcal{S}} U_i(a) - \sum_{i\in\mathcal{N}/\mathcal{S}} U_i(a) \\ \bar{a}_{\mathcal{N}/\mathcal{S}} &\in \arg\max_{a_{\mathcal{N}/\mathcal{S}}} \textstyle\sum_{i\in\mathcal{N}/\mathcal{S}} U_i(a) - \sum_{i\in\mathcal{S}} U_i(a) \end{aligned}$$

On appelle valeur du jeu la valeur de la grande coalition (définie de façon unique au sens où elle est commune à toutes les fonctions de coalition précédentes) :

$$v(\mathcal{N}) = \max_a \sum_{i\in\mathcal{N}} U_i(a)$$

C'est le gâteau à partager. Enfin, la complétude de la fonction nécessite en général $v(\emptyset) = 0$.

Dans ce qui suit, on ne rappelle pas le type de comportement qui préside à la fonction caractéristique, et on notera indifféremment la valeur de coalition $v(\mathcal{S})$.

Rappelons qu'il y a $2^N - 1$ coalitions non vides possibles parmi N joueurs. Le nombre de partitions possibles ne peut être obtenu que par récurrence.

Quelques définitions :

Equilibre fort de Nash (qui n'existe que dans très peu de jeux) : un élément $x^* \in F$ est un équilibre fort de Nash s'il n'existe aucune coalition $\mathcal{S}$ dans une partition quelconque et aucun autre élément $x \in F$ tel que $\sum_{i\in\mathcal{S}} U_i(x) > \sum_{i\in\mathcal{S}} U_i(x^*)$.

Imputation. Une imputation est un vecteur x de partage du gâteau qui ne laisse pas de miettes : $\sum_{i=1}^N x_i = v(\mathcal{N})$.

Imputation non bloquée par une coalition $\mathcal{S}$: une imputation x telle que $\sum_{i\in\mathcal{S}} x_i \geq v(\mathcal{S})$

Coeur. C'est l'ensemble des imputations qui ne sont bloquées par aucune coalition.

Le coeur peut être représenté par les solutions du programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} & \min_x \sum_{i=1}^N x_i \\ \forall \mathcal{S} \quad \subseteq \quad & \mathcal{N} : \sum_{i\in\mathcal{S}} x_i \geq v(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Le coeur sera non vide lorsque la solution x sera telle que $\sum_{i=1}^N x_i = v(\mathcal{N})$.

Signification des duales : théorème de Bondavera-Shapley (voir compl. école chercheurs INRA "théorie des jeux").

Suradditivité relative à $\mathcal{N}$: $\forall \mathcal{S}, \forall \mathcal{T}$, tels que ($\mathcal{S} \cup \mathcal{T} = \mathcal{N}$ et $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \emptyset$) alors $v(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}) \geq v(\mathcal{S}) + v(\mathcal{T})$

Suradditivité : $\forall \mathcal{S}$, $\forall \mathcal{T}$, tels que $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \emptyset$ alors $v(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}) \geq v(\mathcal{S}) + v(\mathcal{T})$

Jeu monotone : $\forall \mathcal{S} \supset \mathcal{T} : v(\mathcal{S} \geq v(\mathcal{T})$

Jeu convexe : $v(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}) + v(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \geq v(\mathcal{S}) + v(\mathcal{T})$ ce qui équivaut à : $\mathcal{S} \supset \mathcal{T} : \nexists i : v(\mathcal{S} \cup \{i\}) - v(\mathcal{S}) \geq v(\mathcal{T} \cup \{i\}) - v(\mathcal{T})$

représentations graphiques : (cf notes 05/02/98 et ante).
Un exemple avec 2 joueurs (cas trivial, figure 35), 3 joueurs (figure 36).

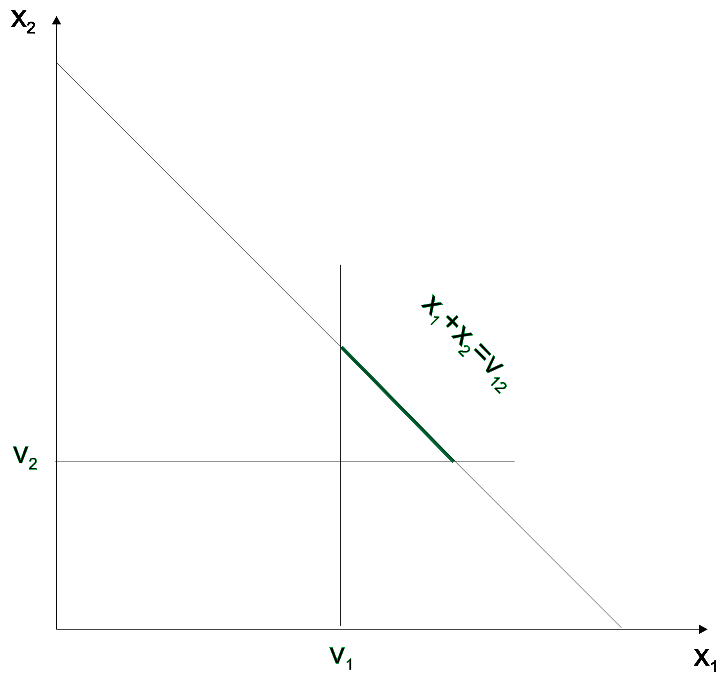


FIG. 35 – Exemple de coeur non vide dans un jeu coopératif à 2 joueurs.

On est confronté à 2 types de problèmes.

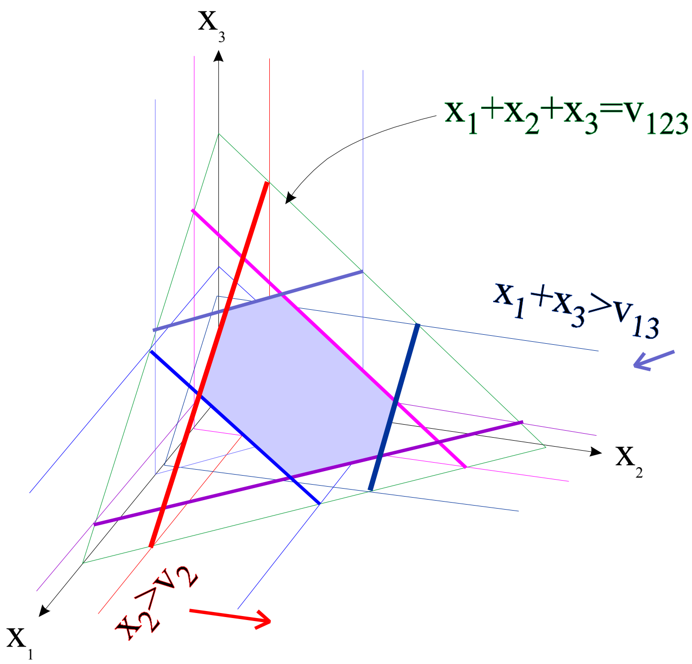


FIG. 36 – Exemple de coeur non vide dans un jeu coopératif à 3 joueurs.

1 : Le coeur est vide.

On limite les coalitions possibles (coalitions hédoniques à la Greenberg)

2 : Le coeur non vide contient en général une infinité d'imputations.

Partition stable.

Coeur d'un jeu à structure de coalition.

10.3.2 Approche axiomatique de Shapley.

On considère les imputations du jeu. La fonction caractéristique du jeu est notée v. On définit la fonction Φ qui à toute fonction v appartenant à l'ensemble des coalitions de $\mathcal{N}$ (noté $L(\mathcal{N})$) une imputation sur $\Re^N$ telle que : $v \in L(\mathcal{N}) \longrightarrow (\Phi_i(v))_{i \in N}$ imputation du jeu.

3 axiomes :

Axiome de symétrie :
Soit Π une permutation de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}$. Considérons le jeu Πv tel que : $\forall \mathcal{S} \subseteq \mathcal{N} \;\; \Pi v(\{\Pi(i), i \in$

$\mathcal{S}) = v(\mathcal{S})$ alors $\forall v \in L(\mathcal{N})$, $\forall \Pi$, $\forall i$: $\Phi_{\Pi(i)}(\Pi v) = \Phi_i(v)$
L'issue pour un joueur ne dépend que de lui, et non de sa "position" par rapport aux autres.

Définition d'un support R du jeu v : $\forall S \subseteq N$, $v(S \cap R) = v(S)$

Axiome du support :
$\forall v \in L(\mathcal{N})$, $\forall R$ support de v : $\sum_{i \in R} \Phi_i(v) = v(R)$
L'issue pour un joueur ne dépend pas des joueurs qui n'apportent rien à l'ensemble (i.e. ceux dont le "gâteau" ne dépend pas).

Axiome de linéarité :
$\forall v \in L(\mathcal{N})$, $\forall w \in L(\mathcal{N})$, $\forall p \in [0,1]$: $\Phi_i(pv + (1-p)w) = p\Phi_i(v) + (1-p)\Phi_i(w)$
Il n'y a pas de loterie qui soit favorable à un joueur, pas d'aversion pour le risque.

interprétation des axiomes à discuter !

Théorème 10.2 *Théorème (Shapley). Il existe un seule issue respectant les 3 axiomes :*

$$\phi_i(v) = \sum_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{N} - \{i\}} \frac{S!(N-S-1)!}{N!} (v(\mathcal{S} \cup \{i\}) - v(\mathcal{S}))$$

On interprête cette valeur comme le gain marginal moyen que chaque joueur apporte à toutes les coalitions auxquelles il n'appartient pas.
Le vecteur de partage $\phi(v)$ (la valeur de Shapley) est toujours défini, en particulier dans le cas où le coeur est vide.
Si le coeur n'est pas vide, rien ne permet en général d'assurer que la valeur de Shapley lui appartient.
Si le jeu est symétrique (joueurs identiques), valeur de Nash et valeur de Shapley sont confondues, et elle appartient au coeur si celui-ci n'est pas vide.

10.3.3 Approches stratégiques

N=2. Menaces dissuasives. Menaces crédibles (retour à l'approche stratégique, H. Moulin).

S-coeur.

10.4 Application : options communautaires de réforme d'une OCM

Un exemple, le marchés des vins (vdt et vqprd), un modèle d'équilibre oligopolistique européen. (article bulletin O.I.V. 1997)
Voir les tableaux "figure" 37. Application à l'UE-12.
Hypothèse de prise de décision en Conseil Européen : vote à la majorité qualifiée (cf les "droits" de vote cités dans l'article).

Marchés européens des vins. V.Q.P.R.D. et vins de table.

Hypothèses et spécification des comportements d'offre et de demande.

Calibrage.

Options de réforme : 4 (y compris le statu quo).

Différentes approches.

Solutions de Nash et pouvoirs de Etats membres selon les droits de vote, la valeur ajoutée, ...

Coalitions et valeur de coalition.

Coeur : vide

Shapley

Coalitions minimales gagnantes.

Partage des gains de la coopération
face à différentes propositions de réforme de l'OCM viti-vinicole
(simulations à partir du modèle VINOPAC - millions d'ECU)

H0 : statu quo
H1 : réduction uniforme des capacités
H2 : suppression de l'OCM
H3 : réduction des capacités au prorata des quantités commercialisées hors soutien en H0

Variations par rapport à la référence ($\mathcal{H}0$)

	scénarios			
zone	$\mathcal{H}0$	$\mathcal{H}1$	$\mathcal{H}2$	$\mathcal{H}3$
fr	0.00	-43.63	-30.55	**71.65**
it	0.00	**44.49**	-195.86	-194.03
es	**0.00**	-1.44	-36.83	-28.34
al	0.00	147.63	**148.06**	**198.12**
gb, ir	0.00	60.84	**169.08**	78.08
nl, dk, be ,lx	0.00	64.84	**138.15**	70.65
pt	0.00	-118.72	**33.78**	-70.90
he	0.00	-30.28	**4.62**	-20.73
UE	0.00	123.73	**230.45**	104.50

Solutions de Nash lorsque l'option ($\mathcal{H}2$) est retenue

	pouvoirs de négociation selon ...			
	droit de vote		contribution FEOGA	
zone	gain	transfert	gain	transfert
fr	30.32	60.87	47.09	77.64
it	30.32	226.18	35.42	231.28
es	24.26	61.09	17.69	54.52
al	30.32	-117.74	60.50	-87.56
gb, ir	39.42	-129.66	35.72	-133.36
nl, dk, be ,lx	45.48	-92.67	28.62	-109.53
pt	15.16	-18.62	2.60	-31.18
he	15.16	10.54	2.83	-1.79

Partage de Shapley
Réaction agressive des exclus d'une coalition, vote à la majorité qualifiée

zone	gain	transfert
fr	79.01	109.56
it	43.47	239.33
es	35.65	72.48
al	38.28	-109.78
gb, ir	3.57	-165.51
nl, dk, be, lx	6.84	-131.31
pt	19.56	-14.22
he	4.06	-0.56

FIG. 37 – Essai de répartition des avantages d'une réforme de l'OCM viti-vinicole (bulletin de l'OIV, 1997, 795-796).

11 Approche dynamique de problèmes d'économie de l'environnement

11.1 Gestion de ressources, renouvelables ou épuisables

Hotelling, Faustman.

Problème 1 :

$max_T \; q(T)e^{-\delta T}$

Ressource optimisée sur une période, lorsque sa valeur actualisée au temps $t = 0$ est $q(t)e^{-\delta t}$.

La période optimale devrait nécessairement être telle que :

$\frac{\dot{q}(T)}{q(T)} = \delta$

Exemple de l'exploitation d'une parcelle boisée. Voir l'article Birfet, Jayet, Hofstetter, Cahiers Economie et Sociologie Rurales 2000 (analyse fondée sur une courbe d'accumulation théorique de biomasse forestière en valeur $q(t)$ selon une forme fonctionnelle à la Richards).

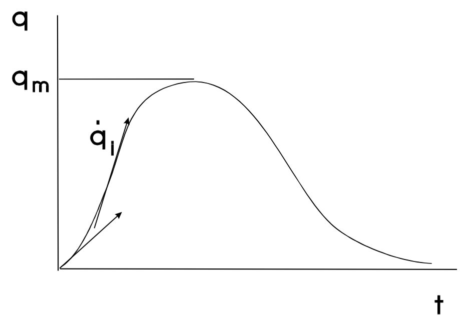


FIG. 38 – Courbe d'accumulation théorique en valeur $q(t)$.

Problème 2 :

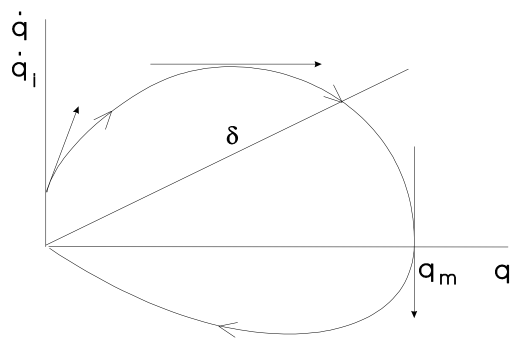


FIG. 39 – Optimum dans le plan accumulation $q(t)$ et croissance $\dot{q}(t)$.

Ressource optimisée sur un horizon T donné, sur plusieurs périodes (identiques ou non), lorsque la valeur en fin de période t et actualisée à $t = 0$ est $q(t)e^{-\delta t}$:

$max_{t_1,t_2,...,t_N} \sum_{i=1}^{N} q(t_i)e^{-\delta \sum_{j=1}^{i} t_j}$

avec, dans le cas des rotations à durée variable, la contrainte : $\sum_{i=1}^{N} t_i = T$
Dans ce cas, par un raisonnement à rebours, on se place en dernière période en considérant l'horizon comme "libre", et on remonte le temps, période après période.

Ou sous la contrainte $t_i = t = T/N$ si on s'impose des périodes identiques, ce qui revient à choisir N le nombre de périodes.

La solution est alors :

$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \delta \left(1 + \frac{1}{e^{\delta t}-1} - \frac{N}{e^{\delta N t}-1}\right)$

Problème 3 :

Ressource optimisée sur un temps infini.
Dans ce problème, il est clair que les périodes sont identiques (quelque soit le temps auquel on se place, on se retrouve face au problème initial). La période t est à l'optimum telle que :

$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{\delta}{1-e^{-\delta t}}$

Problème 4 :

Problème de la gestion d'une mine (épuisable) :

Introduction à la programmation dynamique.

11.2 Gestion d'une ressource commune en asymétrie d'information

Compléter la section 7.6, avec une approche dynamique.
Cf papier avec D. Fuentes-Castro et G. Rotillon. Thèse DFC 2003.

Voir aussi étude "nitrates + dynamique + asymétrie d'info" (F. Bouthillier et P.A. Jayet) en cours.

11.3 Ajustement de l'économie au changement climatique

La régulation de l'effet de serre, plus précisément, le contrôle des émissions de gaz à effet de serre (GES).

Problème :

Consommation du bien x_t, utilité $u(x_t)$, et qui a un impact sur la concentration en gaz à effet de serre z_t, concentration qui entraine une désutilité $v(z_t)$. Taux d'actualisation δ.

Hypothèses habituelle sur $u(x_t)$ et $v(z_t)$.

Dans ce problème, x_t est la variable de commande, et z_t la variable d'état.

Formellement, le problème s'écrit :

$\max_{x(\cdot)} \int_0^T [u(x_t) - v(z_t)]\, e^{-\delta t} dt$

avec l'équation de la dynamique de l'état (i.e. la variable z_t) : $\dot{z}_t = -\lambda z_t + \varepsilon(x_t)$
Résolution à partir du théorème de Pontryagin (A.8).

La variable de commande est le niveau de consommation du bien agrégé de l'économie dont dépend le niveau de concentration en gaz à effet de serre (via la fonction d'émission ε) qui est la variable d'état. On suppose connu le niveau initial de l'état ($z_0 = z^0$). La fonction de dommage (v) est ici directement associée à l'état, ce qui concrêtement signifierait que le dommage est par exemple fonction de la température moyenne, laquelle serait parfaitement corrélée avec la concentration en GES.

Le problème posé est celui du PRG quand on intègre dans l'analyse plusieurs gaz à effet de serre. L'IPCC propose un pouvoir radiatif global, comparé pour chaque gaz à celui du dioxyde de carbone, "tonne par tonne" émise pour l'un et l'autre en début de période pour un horizon déterminé. L'IPCC recommande un PRG calculé à 100 ans. Cela suppose que les dommages à venir (variations de température, de pluviométrie, ...) soient déterminés par les concentrations des gaz pondérées par leurs PRG.
Ce PRG est déterminé, du point de vue des physiciens, par les pouvoirs radiatifs instantanés, par les durées de vie (les "demi-vies") et par la dynamique de la physico-chimie atmosphérique. La question : comment pourrait-être déterminé un PRG intégrant la dimension économique (taux d'actualisation, horizon). La question sous-jacente est celle de l'enjeu qu'il peut y avoir à tenter de réduire ou non dès maintenant ou non les émissions de tel ou tel gaz à effet de serre. Cette question demeure, si un Etat ou groupe d'Etats s'engagegeait résolument vers l'application du protocole de Kyoto. Faut-il agir dès maintenant, en 2004, ou attendre 2008 ? Faut-il privilégier dès maintenant les émissions de tel

ou tel gaz pour les soumettre à régulation.

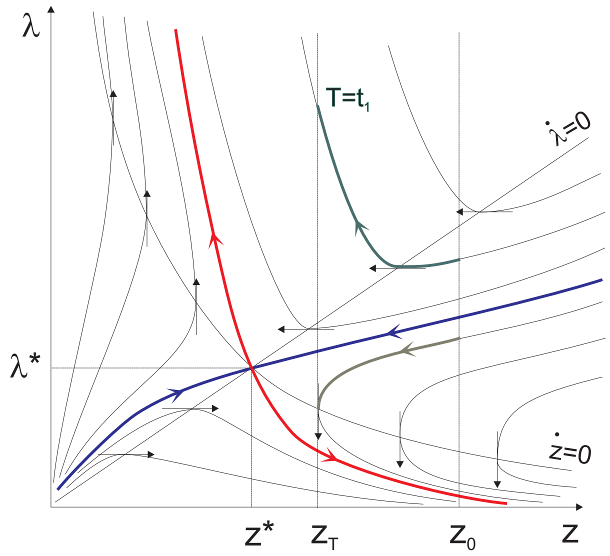


FIG. 40 – Evolution de la variable d'état et du prix implicite.

Autre question, liée au stockage du carbone :
Comment intégrer le stockage dans les sols agricoles (dont le cumul est dépendant de l'utilisation et des pratiques, et limité asymptotiquement dans le temps, limite atteinte en général en 2 ou 3 décennies). Comment intégrer le bois, dont les produits dérivés ont des durées de vie très variables ?

Formulation du problème avec un ou deux biens finaux dans l'économie, et deux gaz à effet de serre de caractéristiques différentes.
Système d'équations différentielles résolu au prix de quelques hypothèses techniques portant sur la fonction d'utilité, les fonctions d'émission, et la fonction de dommage. Représentation graphique de la résolution des équations différentielles dans les plans z, λ (40) et z, x (41)

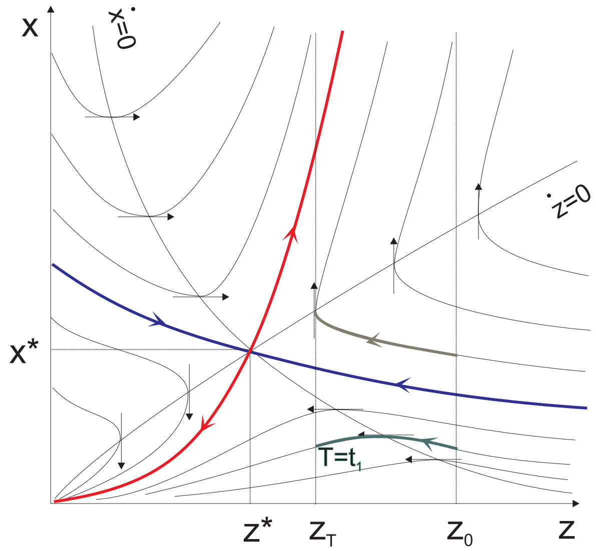


FIG. 41 – Evolution de la variable d'état et de la commande.

A Annexes

A.1 Concavité, convexité

Convexité d'un ensemble :

Un ensemble $X \subset \Re^n$ est convexe ssi : $\forall(x_1, x_2) \in X \otimes X$ et $\forall\lambda \in [0, 1]$, alors $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$.

Concavité d'une fonction :

$f : \Re \longrightarrow \Re^n$ est (strictement) concave sur un ensemble convexe X ssi $\forall(x_1, x_2) \in X \otimes X$ et $\forall\lambda \in [0, 1]$: $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq (\ ) \ \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$.

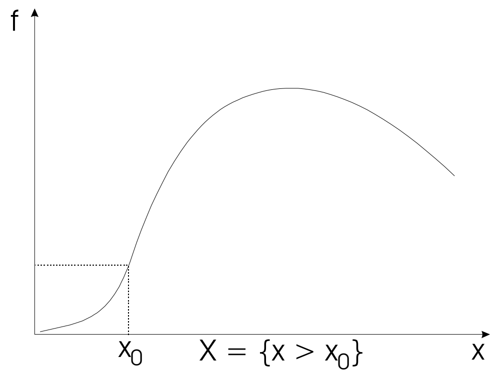


FIG. 42 – Concavité de la fonction f sur l'ensemble X.

Quand f est deux fois différentiable, la concavité stricte (concavité) équivaut à la (semi-) définie-négativité de la matrice hessienne ($H_x f(x) = [\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}] \ll 0 \forall x \in X$).

Quasi-concavité d'une fonction :
$f : \Re \longrightarrow \Re^n$ est (strictement) quasi-concave sur un ensemble convexe X ssi $\forall (x_1, x_2) \in X \otimes X$ tel que $f(x_2) \geq (>)\ f(x_1)$ et $\forall \lambda$ réel $\in [0,1]$: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq (>)\ f(x_1)$.

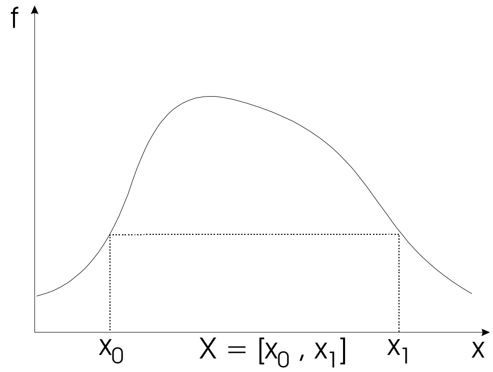


FIG. 43 – Quasi-concavité de la fonction f sur l'ensemble X.

A.2 Quelques théorèmes utiles

Fonctions implicites (exemple d'une fonction d'utilité séparable à maximiser sous contrainte de revenu : $max_{x,y} u(x) + v(y) scpx + qy = R$)
Fonction monotone : continue par morceaux
Fonction continue : dérivable par morceaux
Intégrale curviligne
Théorème de Fubini
Lipschitz

A.3 Extremum

A.3.1 Extremum libre

Considérons le problème de la maximisation d'une fonction ayant les propriétés de dérivabilité "habituelles".

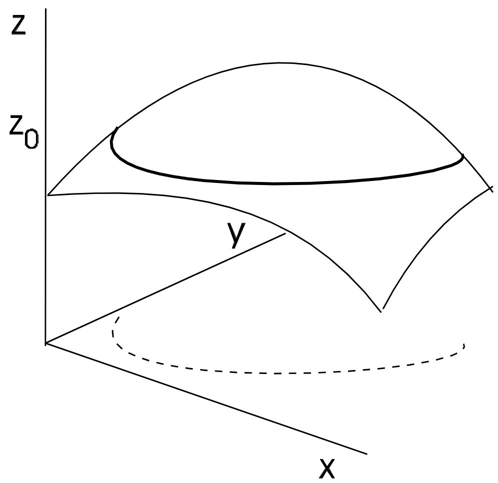


FIG. 44 – Maximum non contraint.

La solution de ce programme de maximisation de $f(x)$, si il en existe une (alors notée x^*), est caractérisée par le système d'équations associées aux "CN1" :

$$\bigtriangledown_x f(x^*) = 0$$

Cependant, dans le cas général, pour peu qu'elles soient compatibles avec la différentiabilité de la fonction f, ces conditions ne sont ni nécessaires (par exemple dans le cas d'une fonction monotone sur un domaine fermé) ni suffisantes (cas simple d'une fonction de $\Re$ dans $\Re$ avec un point d'inflexion en lequel la dérivée est nulle).

A.3.2 Extremum contraint

Qualification des contraintes.

A.3.3 Applications en économie

Exemples à donner.

A.4 Théorèmes d'enveloppe

A.4.1 Aperçu

Considérons la fonction $x, \alpha \in \Re^{n+p} \longrightarrow f \in \Re$ et le problème paramétré $\max_x f(x, \alpha)$. La fonction f est supposée différentiable 2 fois.

Théorème A.1 *Théorème du maximum : la fonction valeur $f^*(\alpha)$ est continue.*

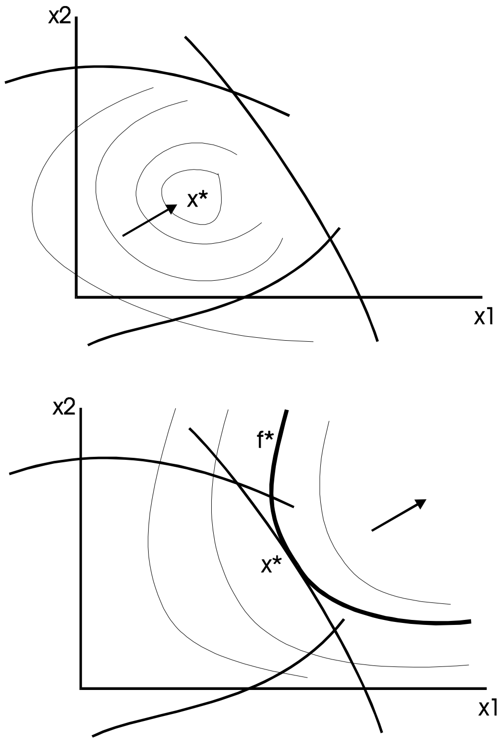


Fig. 45 – Opimum d'une fonction sous contraintes.

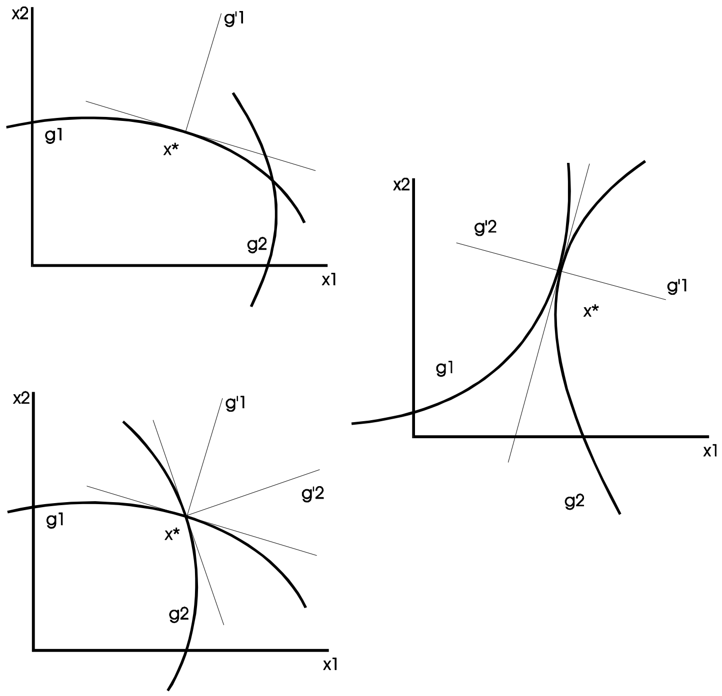


FIG. 46 – Qualification des contraintes.

On note $x^*(\alpha)$ "la" solution du problème et $f^*(\alpha)$ la fonction "valeur" du problème (la valeur de l'optimum par rapport à x en α).

Supposons f^* différentiable. Nous avons un premier théorème d'enveloppe :

$$\frac{\partial f^*(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial f(x^*, \alpha)}{\partial \alpha}$$

On peut généraliser ce résultat dans un problème d'optimisation contraint. Etudions le problème :

$$\begin{array}{l} \max\limits_x f(x, \alpha) \\ sc \quad g(x, \alpha) \leq 0 \quad (\lambda) \end{array}$$

avec f et g des fonctions respectivement de $\Re^{n+p}$ dans $\Re$ et de $\Re^{n+p}$ dans $\Re^m$ (m est le nombre de contraintes). Le lagrangien du problème s'écrit $\mathcal{L}(x, \lambda, \alpha) = f(x, \alpha) - \lambda \cdot g(x, \alpha)$. A l'optimum, les conditions suivantes doivent être vérifiées (voir ci-dessus l'optimisation sous contraintes) :

$$\begin{array}{c} \frac{\partial \mathcal{L}(x^*(\alpha), \lambda^*(\alpha), \alpha)}{\partial x} = 0 \\ \forall i \ i = 1, ..., m \ : \ \lambda_i^*(\alpha) g_i(x^*(\alpha), \alpha) = 0 \end{array}$$

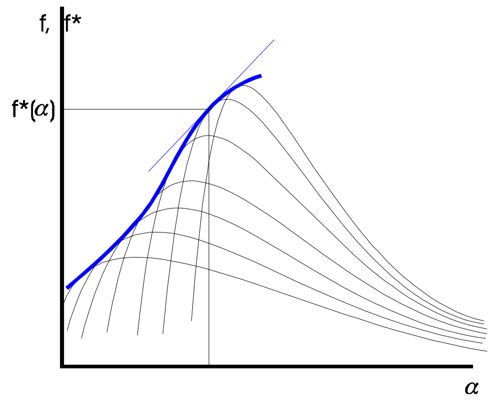


FIG. 47 – Enveloppe d'une application paramétrée.

On note toujours $x^*(\alpha)$ la "solution primale du problème et $f^*(\alpha)$ la fonction "valeur" du problème. La solution duale est notée $\lambda^*(\alpha)$. On note enfin $g^*(\alpha) = g(x^*(\alpha), \alpha)$ et $\mathcal{L}^*(\alpha) = \mathcal{L}(x^*(\alpha), \lambda^*(\alpha), \alpha)$.

A l'optimum, nécessairement :

$$\mathcal{L}^*(\alpha) = f^*(\alpha)$$

Par ailleurs :

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{d\mathcal{L}(x^*(\alpha), \lambda^*(\alpha), \alpha)}{d\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\frac{\partial x^*}{\partial \alpha} + g^*(\alpha) \cdot \frac{\partial \lambda^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}(x^*(\alpha), \lambda^*(\alpha), \alpha)$$

Considérons un domaine de valeurs de α dans lequel les contraintes restent dans le même état de saturation. On en déduit un autre théorème d'enveloppe :

$$\frac{\partial f^*(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}^*(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial f(x^*(\alpha), \alpha)}{\partial \alpha} + \lambda^*(\alpha) \cdot \frac{\partial g(x^*(\alpha), \alpha)}{\partial \alpha}$$

pour tout domaine de α tel que $g(x^*(\alpha), \alpha) = 0$

Interprétation des multiplicateurs associés aux contraintes de "ressources".

A.4.2 Applications en économie

Lemme de Hotelling
Lemme de Shepard
Identités de Roy
Intégrabilité (calcul de surplus)

A.5 Théorèmes de points fixes

Brouwer
Kakutani

A.6 Dualité en économie

Dualité en mathématique

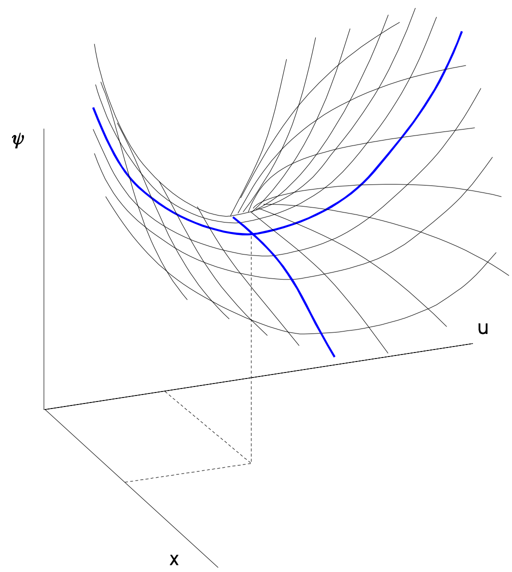


FIG. 48 – Point col et dualité.

Marshall, Hicks

Relations de Slutsky

Problème de l'intégrabilité, calcul de surplus

A.7 Eléments de théorie des jeux

Joueur, action, stratégie, espace stratégique.

Jeu sous forme normale : espace des stratégies pour chaque joueur i ($i \in \mathcal{N} = \{1, 2, ..., N\}$) : $X_i \subset \Re$.
Utilité des joueurs : $(x_1, x_2, ..., x_i, ...x_N) \in \bigotimes_{i \in \mathcal{N}} X_i \rightarrow U_i(x_1, x_2, ..., x_i, ...x_N) \in \Re$.

Hypothèses additionnelles (sur X, sur U) ? compléter, vérifier.

Stratégie dominante : $x_i^* \in X_i$ est une stratégie dominante pour le joueur ssi $\forall x_i \in X_i$, $\forall x_{-i} \in \bigotimes_{j \in \mathcal{N}, j \neq i} X_j$: $U_i(x_i^*, x_{-i}) \geq U_i(x_i, x_{-i})$. On note $\mathcal{D}_i^*$ l'ensemble des stratégies dominantes pour i.

Stratégie dominée : $y_i \in X_i$ est une stratégie dominée pour le joueur ssi $\forall x_{-i} \in \underset{j \in \mathcal{N}, j \neq i}{\otimes} X_j$, $\exists\, x_i \in X_i : U_i(y_i, x_{-i}) < U_i(x_i, x_{-i})$.

Stratégie non dominée : $x_i^{\circ} \in X_i$ est une stratégie non dominée pour le joueur ssi $\exists x_{-i} \in \underset{j \in \mathcal{N}, j \neq i}{\otimes} X_j$, $\forall\, x_i \in X_i : U_i(x_i^{\circ}, x_{-i}) \geq U_i(x_i, x_{-i})$. L'ensemble des stratégies non dominées est noté $\mathcal{D}_i^{\circ}$. Une stratégie dominante est évidemment non dominée, mais la réciproque n'est pas vraie. De plus, $\mathcal{D}_i^{\circ} \neq \emptyset$.

Equilibre de Nash : existence d'un équilibre de jeu non coopératif en information complète (voir par exemple l'ouvrage "AA Gremaq"). Définition : $x^{EN} \in \underset{i \in \mathcal{N}}{\otimes} X_i$ est un équilibre de Nash ssi, à stratégie x_j^{EN} fixée pour tout j différent de i, i n'a pas intérêt à dévier, ce qui de façon formalisée donne : $\forall\, i$, $\forall\, x_i \in X_i : U_i(x^{EN}) \geq U_i(x_i, x_{-i}^{EN})$.

Optimum de Pareto : $x^P \in \underset{i \in \mathcal{N}}{\otimes} X_i$ est un optimum de pareto ssi : $\forall y \in \underset{i \in \mathcal{N}}{\otimes} X_i$, $\nexists i \in \mathcal{N}$ tel que $U_i(y_i, x_{-i}^P) > U_i(x^P)$. Un optimum de Pareto est une issue non dominée (caractérisée par des stratégies non dominées, pour chaque joueur). Par ailleurs, $\mathcal{P} \neq \emptyset$, en notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des optima de Pareto.

Equilibre en stratégies dominantes. Supposons que $\mathcal{D}_i^* \neq \emptyset\ \forall i$. $x^{SD} \in \underset{i \in \mathcal{N}}{\otimes} X_i$ est un équilibre en stratégies dominantes ssi : $\forall i$, $\forall x \in \underset{i \in \mathcal{N}}{\otimes} X_i : U_i(x^{SD}) \geq U_i(x)$. En général, pour un jeu quelconque, il n'existe pas d'équilibre en startégies dominantes.

Dans le dilemme du prisonnier (cf figure 29), le paradoxe est que toutes les issues sont dominées, au sens de la somme des gains, et plus encore au sens de Pareto, par l'équilibre en stratégies dominantes.

Fonction de meilleure réaction :

Equilibre de Stackelberg : Joueur leader de Stackelberg, anticipe que les autres ("suiveurs") jouent leur meilleure réaction, et optimise ses gains en conséquence.

Dilemme du prisonnier : en sortir et faire émerger l'issue "coopérative" ?
Coopération par la répétition (nombre infini ou aléatoire). "tit for tat"

Jeu sous forme extensive.

Equilibre de Nash parfait.

Stratégies mixtes.

Equilibres bayésiens.

Folk théorèmes.

A.8 Eléments de contrôle optimal

état $x(t)$, commande $u(t)$

"temps discret"

"temps continu" :
Un problème du type :

$$(\mathcal{H}) \quad \left| \begin{array}{c} \max_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \int_0^T f(x(t),u(t),t)dt \\ \\ \dot{x}(t) = g(x(t),u(t),t) \\ \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

Bellman

Hamiltonien : La fonction $H((x(t),u(t),\lambda(t),t)) = f(x(t),u(t),t) + \lambda(t)\cdot g(x(t),u(t),t)$

Hamiltonien "courant" quand l'objectif est $\int_0^T f(x(t),u(t),t)e^{-\delta t}dt$:
$H((x(t),u(t),\lambda(t),t)) = f(x(t),u(t),t) + \lambda(t)\cdot g(x(t),u(t),t)$

Théorème de Pontryagin
A détailler (cf notes de cours "opti")

Horizon fini / infini

conditions de transversalité

En général, la résolution du problème renvoie à celle d'un système différentiel :

$$(\mathcal{S}) \quad \left| \begin{array}{c} \dot{x} = g(x,u,t) \\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x} \end{array} \right.$$
$$u = argmax_{v\in\mathcal{U}}\ H(x,v,\lambda,t)$$

qui permet de caractériser (le plus souvent) le(s) équilibre(s) stationnaire(s), et plus difficilement (et au moins graphiquement) les trajectoires optimales.

Retour sur la "variable de temps" t, unidimensionnelle :
La "dimension" de t peut devenir un problème pertinent quand cette variable ne s'applique plus formellement au "temps" mais aux caractéristiques d'un agent économique

(utile en théorie des contrats par exemple, mais complexe au points que les quelques résultats obtenus - ?- reposent sans doute plus sur du calcul numérique que sur des éléments analytiques).

Quelques éléments mathématiques sur ce point dans Seirstadt et Sydsaeter.

Equations d'Euler (comme souvent, viennent de la physique) :
Le problème :

$$\max_{x(\cdot)} \int_0^T f(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$

La variable x peut être de dimension n.

La solution doit être telle que :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Remarque 1 :
On retrouve les équations d'Euler à partir du problème ($\mathcal{H}$) dans lequel $g(x, u, t) = u$) (la variable de "commande", c'est la "vitesse") et du système ($\mathcal{S}$) (avec les "bonnes" hypothèses de régularité sur la fonction f et le domaine $\mathcal{U}$) :
$u* = argmax_{u \in \mathcal{U}} \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda = 0$ et $\dot{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x}$ conduisent à la relation ci-dessus.

Remarque 2 :
Considérons le problème en temps discret : $max\ F = \sum_{t=0}^{T} f(x_t, \dot{x}_t, t)\Delta$ (la vitesse est ici égale à $\dot{x}_t = \frac{x_{t+1} - x_t}{\Delta}$, le pas de temps est Δ). Les CN1^{er} ordre caractérisant l'optimum conduisent aux équations $\frac{\partial F}{\partial x_t} = \Delta \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x_t, \dot{x}_t, t) - \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x_t, \dot{x}_t, t) - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x_{t-1}, \dot{x}_{t-1}, t-1) \right] \right\} = 0$ équivalentes en temps discret aux équations précédentes en temps continu.